

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

Avez vous révisé vos TD ?

Exercice

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 2$, et A un sous-ensemble de E de cardinal $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Problème 1

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par:

$$\varphi(t) = \arcsin(\sin(2t)).$$

1. Etudier la parité et la périodicité de φ .
2. Simplifier $\varphi(t)$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et pour $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Donner l'allure représentative de φ .

Dans toute la suite on considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

et on notera \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

4. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $|2x| \leq 1+x^2$.

5. Préciser le domaine de définition de f .
6. Etudier la parité de f et justifier que \mathcal{C}_f présente un centre de symétrie.
7. Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ simplifier $\frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)}$ puis $f(\tan(t))$.
8. Exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ en fonction de φ et \arctan .
9. Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
10. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
11. Calculer les limites

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x).$$

On admettra que les valeurs obtenues sont les pentes des demi-tangentes à droite et à gauche à \mathcal{C}_f en 1.

12. Ecrire le DL de la fonction $g : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ à l'ordre 3 en 1.
13. En admettant que f admet des DL en 1^- à l'ordre 2 de la forme

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + (x-1) + a(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$
 calculer ce DL.
14. Faites la même chose en 1^+ .
15. Préciser alors la position de \mathcal{C}_f par rapport à ses demi-tangentes en 1.
16. Représenter \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé dont l'unité est de 2 cm.

Problème 2

Dans tout le problème \mathcal{E} désigne l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Partie I

17. Justifier pourquoi les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ appartiennent à \mathcal{E} .

18. Déterminer toutes les fonctions constantes de \mathcal{E} .

19. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ est dans \mathcal{E} .

20. Dédurre de la question précédente d'autres éléments de \mathcal{E} .

21. Soit $f \in \mathcal{E}$. En donnant à x et y des valeurs particulières, prouver que :

- $f(0)$ vaut 0 ou 1.
- Si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle sur \mathbb{R} .
- Si $f(0) = 1$ alors f est une fonction paire.

Partie II

Dans cette partie, on fixe un élément f de \mathcal{E} tel que :

$$f \text{ non identiquement nulle et } \exists x_0 \in \mathbb{R}^* \mid f(x_0) = 0$$

et on veut déterminer f .

22. Remarquer que $f(0) = 1$ et que f est paire.

23. Justifier que l'ensemble $A = \{x > 0 \mid f(x) = 0\}$ est non vide et qu'il admet une borne inférieure que l'on note a .

24. En utilisant la continuité de f montrer que $f(a) = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que $a > 0$.

25. Montrer que $\forall x \in [0, a[: f(x) > 0$.

Dans toute la suite on pose $\omega = \frac{\pi}{2a}$ et on note g la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(\omega x). \end{aligned}$$

26. Montrer que :

$$\forall q \in \mathbb{N} : f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2 \left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) \right)^2.$$

27. En raisonnant par récurrence déduire de la question précédente que :

$$\forall q \in \mathbb{N} : f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right).$$

28. Montrer aussi que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N} : f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right).$$

29. Etendre l'égalité précédente à tout $p \in \mathbb{Z}$.

On note $D = \left\{ \frac{pa}{2^q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.

30. En admettant que tout réel x est limite d'une suite de la forme $\left(\frac{p_n a}{2^{q_n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D , montrer que $f = g$.

31. (Question facultative) Démontrer que tout réel x est limite d'une suite de la forme $\left(\frac{p_n a}{2^{q_n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D .