

## Devoir surveillé de Mathématiques – n° : 1 –

Durée: 2 heures

**Exercice 1** Soient  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  deux applications.

1. Montrer les implications suivantes:

a.  $g \circ f$  injective  $\implies f$  injective.

b.  $g \circ f$  surjective  $\implies g$  surjective.

2. En déduire que si  $E = G$  et  $f \circ g \circ f$  bijective alors  $f$  et  $g$  sont bijectives.

---

**Exercice 2** On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation:

$$z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0 \quad (\text{E})$$

3. Montrer que (E) possède une solution imaginaire pure de la forme  $iy, y \in \mathbb{R}$ .

4. Déterminer les racines carrées complexes de  $5 - 12i$ .

5. Résoudre l'équation (E).

6. Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation (E).

---

**Exercice 3** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que:

$$\begin{cases} \exists a \in \mathbb{R} : f(a) \neq 0, \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x + y) = f(x) + f(y), \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(xy) = f(x)f(y). \end{cases}$$

7. Calculer  $f(0), f(1)$  et  $f(-1)$ .

8. a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, f(n) = n$

b. En déduire que pour tout  $p \in \mathbb{Z}, f(p) = p$ .

9. Montrer que pour tout  $r \in \mathbb{Q}, f(r) = r$ .

10. a. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq 0$ .

b. En déduire que  $f$  est croissante.

11. Conclure que  $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

---

**Exercice 4** Soit  $g$  la fonction  $x \mapsto \frac{x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2}$ .

12. Donner le domaine de définition de  $g$ .

13. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.

14. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction ainsi que la position de ce graphe par rapport à celle-ci.