

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

La deuxième et la troisième partie du problème sont indépendantes et utilisent des résultats de la première partie.

Dans ce problème, on s'intéresse aux fonctions vérifiant le système de conditions suivantes

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x+1) + f(x) = \varphi(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où  $\varphi$  est une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , vérifiant la condition  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ .

Dans la première partie, on montre l'existence et l'unicité de  $f$  vérifiant le système (1). Dans les deux parties suivantes, on étudie des exemples.

## I - Existence et unicité de la solution du système (1)

### I.A- Unicité

Soient  $f$  et  $g$  deux solutions du système (1).

I.A.1) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = g(x) + (-1)^n (f(x+n) - g(x+n))$$

I.A.2) En déduire, par un passage à la limite, que  $f = g$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

### I.B- Existence

I.B.1) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \varphi(x+k)$  converge.

I.B.2) On pose, pour  $x$  dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varphi(x+k)$ .

a) Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x+1) + f(x) = \varphi(x)$$

b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) - \varphi(x+1) \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

c) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et conclure.

## II - Premier exemple

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Un polynôme sera noté indifféremment  $P$  ou  $P(X)$ .

### II.A- Étude d'une application linéaire

Soit  $\theta$  l'application définie sur  $\mathbb{R}[X]$  par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \theta(P)(X) = \frac{1}{e} P(X+1) + P(X)$$

où  $e$  désigne  $\exp(1)$ .

II.A.1) Montrer que  $\theta$  réalise un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

II.A.2) Vérifier que  $\theta$  conserve le degré, c'est-à-dire, pour tout  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\deg(\theta(P)) = \deg(P)$ .

II.A.3) En déduire que  $\theta$  est injective.

II.A.4) Montrer que la restriction de  $\theta$  à  $\mathbb{R}_n[X]$  induit un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  noté  $\theta_n$ .

II.A.5) Montrer que  $\theta_n$  est bijectif.

II.A.6) En déduire que, pour tout  $Q$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , il existe un unique polynôme  $P$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$\frac{1}{e} P(X+1) + P(X) = Q(X)$$

II.A.7) Montrer que, si la fonction  $\varphi$  est de la forme  $x \mapsto Q(x) \exp(-x)$  où  $Q$  est dans  $\mathbb{R}[X]$ , la solution du système (1) est de la forme  $x \mapsto P(x) \exp(-x)$  où  $P$  vérifie  $\theta(P) = Q$ .

II.A.8) Résoudre (1) avec  $\varphi(x) = (x+1) \exp(-x)$ .

### II.B- Exemple

Jusqu'à la fin de cette partie, on s'intéresse à l'unique polynôme  $P_n$  tel que :

$$\frac{1}{e} P_n(X+1) + P_n(X) = X^n$$

c'est-à-dire tel que  $\theta(P_n) = X^n$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ).

II.B.1) Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Montrer que  $P'_n = nP_{n-1}$  et exprimer  $P_n^{(k)}$  en fonction de  $P_{n-k}$  pour  $0 \leq k \leq n$ .

**II.B.2)** En déduire, en utilisant la formule de Taylor, que :

$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X)$$

**II.B.3)** Montrer que :

$$P_n(X) = \frac{e}{e+1} X^n - \frac{1}{e+1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X)$$

**II.B.4)** Écrire un algorithme en français permettant de calculer  $P_n(x)$ ,  $n$  et  $x$  étant donnés par l'opérateur. Pour cet algorithme, on suppose l'existence d'une fonction binomial telle que `binomial(n,k)` renvoie la valeur  $\binom{n}{k}$ .

### III - Deuxième exemple

Jusqu'à la fin de ce problème on prendra  $\varphi(x) = \frac{1}{x+1}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .

#### III.A- Écriture intégrale de la solution

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

avec la convention  $t^0 = 1$ .

**III.A.1)** Calculer  $f(0)$ .

**III.A.2)** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x+1}$$

**III.A.3)** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$$

**III.A.4)** En déduire que la solution du système (1) est la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

#### III.B- Calcul de quelques valeurs et équivalents

**III.B.1)** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

**III.B.2)** Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$$

**III.B.3)** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{k}$$

**III.B.4)** Soit  $x$  dans  $\mathbb{R}_+$  et soit  $N$  dans  $\mathbb{N}$ .

a) Montrer que :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{x+k+1} \right| \leq \frac{1}{x+N+2}$$

b) En déduire un algorithme de calcul de  $f(x)$  à  $\varepsilon$  près,  $x$  et  $\varepsilon$  étant donnés par l'opérateur.

**III.B.5)** Montrer, sans dérivation, que la fonction  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

**III.B.6)** En déduire que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \frac{1}{2(x+1)} \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$$

**III.B.7)** Donner, en le justifiant, un équivalent simple de  $f(x)$  au voisinage de  $+\infty$ . En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

**III.B.8)** La série de terme général  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$  est-elle convergente ?