Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.
Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Dans la suite, le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Un point M du plan peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ou par ses coordonnées polaires ρ et θ (rayon et angle polaires).

Exercice

On considère la courbe $\Gamma : t \longmapsto M(t)$ définie par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+3}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t\left(t^2+2\right)}{t^2+1} \end{cases}$$

1 . Etudier la parité de x et y et préciser les éventuelles symétries de Γ.

2 . Etudier les limites de x et y en $+\infty$ et préciser les branches infinies de Γ.

3 . Dresser le tableau de variations commun à x et y.

4 . Représenter graphiquement Γ, on précisera en particulier les points de Γ où les tangentes sont parallèles aux axes de coordonnées.

5 . On considère trois points distincts de Γ, de paramètres t_1, t_2, t_3. A quelle condition sur t_1, t_2, t_3 les points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont alignés.

Problème (CNC 2007. math1 TSI)

Étant donné un arc Γ birégulier et un point M de Γ, on note :
- s l'abscisse curviligne de M sur Γ,
- $\overrightarrow{T}$ le vecteur unitaire tangent à Γ en M et $\overrightarrow{N}$ le vecteur unitaire vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}}) = \dfrac{\pi}{2}$,
- R le rayon de courbure algébrique de Γ en M et I le centre de courbure de Γ en M,
- $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ les vecteurs défini par : $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \dfrac{\pi}{2})$,
- V l'angle $(\widehat{\vec{u}(\theta), \overrightarrow{T}})$ et α l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{T}})$.

Première partie

On considère l'arc Γ_1 d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$ et on note φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{P}$ définie par

$$\theta \longmapsto O + (1+\cos\theta)\vec{u}(\theta).$$

6 . (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction ρ et en préciser une période.

(b) Étudier la parité de ρ et en déduire que le support de l'arc Γ_1 possède un axe de symétrie à préciser.

(c) Comment peut-on obtenir le support de l'arc Γ_1 à partir de celui de l'arc $\Gamma_2 = ([0, \pi], \psi)$ où ψ désigne la restriction de φ au segment $[0, \pi]$.

7 . Préciser la nature du pôle O, point du support de Γ_1 de paramètre π.

8 . Soit $M_0 = \varphi(\theta_0)$ un point de Γ_1 distinct du pôle O. Montrer que M_0 est un point birégulier et préciser la concavité de Γ_1 en ce point.

9 . Étudier la fonction $\rho : \theta \longmapsto 1 + \cos\theta$ sur le segment $[0, \pi]$ et dresser son tableau de variations.

10 . Tracer soigneusement le support de l'arc Γ_1 en précisant les tangentes aux points d'intersection de son support avec les axes des coordonnées (unité : 3cm).

11 . Calculer la longueur de l'arc Γ_2.

12 . Calculer l'aire de la portion du plan délimité par le support de l'arc Γ_1.

Deuxième partie

Questions de cours

Soit Γ un arc birégulier de $\mathcal{P}$ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$; on note s une abscisse curviligne sur Γ orienté dans le sens des θ croissants.
On rappelle que $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, $R = \dfrac{ds}{d\alpha}$ et $\tan V = \dfrac{f}{f'}$.

13 . Faire un croquis propre et lisible en traçant une portion de l'arc Γ et en plaçant en un point M de paramètre θ, distinct du pôle O, les vecteurs $\vec{u}(\theta)$, $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et les angles θ, V et α.

14 . Rappeler la définition de s et exprimer $\dfrac{ds}{d\theta}$ à l'aide de f et f'.

15 . Calculer $\dfrac{dV}{d\theta}$ et en déduire l'expression du rayon de courbure R.

16 . Exprimer les coordonnées de I, centre de courbure de Γ en M, dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

Retour à l'arc Γ_1

Soit s une abscisse curviligne sur l'arc Γ_1 orientée dans le sens des θ croissants.
À tout point $M(\theta)$ de l'arc Γ_1, distinct du pôle O, on associe le centre de courbure noté $I(\theta)$.

17 . Préciser les coordonnée de $I(\theta)$ d'abord dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ puis dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

18 . Montrer que le point $I(\theta)$ est l'image du point $M(\theta + \pi)$ de Γ_1 par une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport λ .

19 . On note $H(\theta)$ le projeté orthogonal du point $I(\theta)$ sur la droite $(OM(\theta))$ joignant les points O et $M(\theta)$. Montrer que le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport μ.

20 . On note Γ_I et Γ_H les courbes décrites respectivement par le centre de courbure $I(\theta)$ et son projeté orthogonal $H(\theta)$. Tracer les supports de Γ_1, Γ_I et Γ_H sur le même graphique, et placer un point $M(\theta)$ de Γ_1 et les points $I(\theta)$ et $H(\theta)$ correspondant.

21 . Donner la longueur de la courbe Γ_H décrite par le point $H(\theta)$ ainsi que l'aire de la portion du plan qu'elle délimite.