

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Les parties du problème sont dans une large mesure indépendantes.

Petit extrait du CNC 2010, Math 2

Soit b et c deux complexes non nuls; on définit l'application

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad z \longmapsto bz + c\bar{z}$$

et on pose $\mathcal{N} = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$.

QUESTION 1 Montrer que f est injective si et seulement si $\mathcal{N} = \{0\}$.

QUESTION 2 En déduire que f est injective si et seulement si $|b| \neq |c|$.

QUESTION 3 On suppose $|b| = |c|$ et on pose $b = re^{i\alpha}$ et $c = re^{i\beta}$. Montrer que l'image du cercle unité $\mathcal{C} = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ par f est un segment de \mathbb{C} , dont on précisera les extrémités.

Problème

Soit a un nombre réel appartenant à $[-1; 1]$ et φ une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f , continues sur \mathbb{R} , telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t) dt + \varphi(x).$$

QUESTION 4 Pour cette question, nous prenons a égal à 1 et φ désigne la fonction exponentielle.

On suppose l'existence d'une application f , continue sur \mathbb{R} , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x f(t) dt + e^x.$$

- Calculer $f(0)$.
- Justifier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} et exprimer, pour tout nombre réel x , $f'(x)$ en fonction de x , f et e^x .
- En déduire la fonction f .

QUESTION 5 Pour cette question, nous prenons a égal à -1 et φ désigne encore la fonction exponentielle.

On suppose l'existence d'une application f , continue sur \mathbb{R} , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{-x} f(t) dt + e^x.$$

- Calculer $f(0)$.
- Justifier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} et exprimer, pour tout nombre réel x , $f'(x)$ en fonction de x , $f(x)$ et e^x . Calculer $f'(0)$.
- Justifier que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et exprimer, pour tout nombre réel x , $f''(x)$ en fonction de x , $f'(x)$ et e^x .
- Démontrer alors que, pour tout nombre réel x , on a

$$f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x}.$$

- En déduire la fonction f .

QUESTION 6 Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1; 1]$ et φ est l'application nulle.

On suppose l'existence d'une application f , continue sur \mathbb{R} , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t) dt.$$

- Justifier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} et exprimer, pour tout nombre réel x , $f'(x)$ en fonction de x , a et f .
- Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et que, pour tout nombre entier naturel n , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

- En déduire, pour tout nombre entier naturel n , la valeur de $f^{(n)}(0)$.
- Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n , on a

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

- Soit A un nombre réel strictement positif.

(i) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que

$$\forall x \in [-A; A], \quad |f(x)| \leq M$$

et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n , on a

$$\forall x \in [-A; A], \quad |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

(ii) Soit x un nombre réel appartenant à $[-A; A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n , on a

$$|f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$$

et en déduire que $f(x) = 0$.

(f) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?