Devoir surveillé de Mathématiques – n° 4 –

durée: 2 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

Problème 1

Dans tout ce problème h et f sont des fonctions réelles données définies et continues sur $\mathbb{R}$. Soit (E) l'équation différentielle:

$$(E) : -y''(x) + h(x)y(x) = f(x),$$

où la fonction y est une fonction inconnue définie sur $\mathbb{R}$. Et soit (S) le système:

$$(S) : \begin{cases} -y''(x) + h(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

1 . Résoudre E puis S, dans les cas:

(a) $h(x) = 1$ et $f(x) = xe^x$.

(b) $h(x) = -1$ et $f(x) = x\cos(x)$.

2 . On suppose que h est constante ($h(x) = \omega \in \mathbb{R}$) et $f(x) = 0$. Discuter selon ω les solutions de (E) et (S).

3 . soit φ une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$; et soit Φ la fonction définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \Phi(x) = (1-x)\int_0^x t\varphi(t)dt + x\int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt.$$

Démontrer que la fonction Φ est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$; déterminer sa dérivée seconde Φ'' ainsi que $\Phi(0)$ et $\Phi(1)$.

4 . En déduire, lorsque la fonction h est nulle, l'existence et l'unicité d'une solution y du système (S).

Dans la suite, f est supposée nulle $(f = 0)$.

5 . Démontrer que, pour qu'une fonction y, définie et continue sur $\mathbb{R}$, vérifie le système (S) , il faut et il suffit que la fonction y vérifie,

$$\forall x \in \mathbb{R} : y(x) = (x-1)\int_0^x th(t)y(t)dt + x\int_x^1 (t-1)h(t)y(t)dt.$$

6 . Soit y une solution du système (S) ; démontrer, pour tout réel $x \in [0,1]$:

$$|y(x)| \leq \frac{HY}{8},$$

où $H = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |h(x)|$ et $Y = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |y(x)|$.

7 . En déduire une condition nécessaire sur la fonction h, pour qu'il existe des solutions y, autres que la fonction nulle, du système (S).

8 . Vérifier que, lorsque la fonction h est constante, cette condition est remplie lorsqu'il y a des solutions du système (S) différentes de 0.

Problème 2

Partie I

Soit α un réel positif. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout nombre entier naturel n, on considère

$$Z_n(x) = \frac{1}{n!}\int_1^x t^\alpha (\ln(t))^n \, dt.$$

9 . Calculer $Z_0(x)$ et $Z_1(x)$.

10 . Déterminer une relation entre $Z_n(x)$ et $Z_{n+1}(x)$.

11 . Montrer que

$$Z_n(x) = \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{(\ln(x))^k}{k!}\right]x^{\alpha+1}$$

12 . On note $\mathcal{N}_\alpha^n$ l'ensemble des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles, du type suivant:

$$x \longmapsto P(\ln(x))x^\alpha,$$

où P est une fonction polynômiale de degré au plus n.
Montrer que toute fonction élément de $\mathcal{N}_\alpha^n$ admet au moins une primitive élément de $\mathcal{N}_{\alpha+1}^n$.

Partie II

Pour $\alpha > 0$, on considère les deux équations différentielles:

$$(E_1) : xy' - \alpha y = 0 \quad \text{et} \quad (E_2) : x^2 y'' + (1 - 2\alpha)\, xy' + \alpha^2 y = 0$$

13 . Déterminer toutes les solutions de (E_1) sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles.

14 . Montrer que toute solution de (E_2) sur $]0, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

15 . Soit $h :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On définit l'application

$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad t \longmapsto k(t) = h(e^t).$$

(a) Justifier que k est de classe $\mathcal{C}^2$, et calculer $k'(t)$ et $k''(t)$ à l'aide des dérivées de h.

(b) Montrer que h est solution de (E_2) si et seulement si k est solution d'une équation différentielle (E_3) linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on déterminera.

16 . Résoudre l'équation différentielle (E_3) .

17 . Endéduire que l'ensemble des solutions de (E_2) définies sur $]0, +\infty[$ est $\mathcal{N}_\alpha^1$.

On considère l'application

$$\phi : \mathcal{C}^\infty\left(]0, +\infty[\,, \mathbb{R}\right) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty\left(]0, +\infty[\,, \mathbb{R}\right); \quad y \longmapsto xy' - \alpha y.$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\phi^n = \underbrace{\phi \circ \phi \circ .. \circ \phi}_{n \text{ fois}}.$$

18 . Pour $y \in \mathcal{C}^\infty\left(]0, +\infty[\,, \mathbb{R}\right)$, calculer $\phi \circ \phi(y)$. En déduire que

$$\phi \circ \phi(y) = 0 \iff y \in \mathcal{N}_\alpha^1.$$

19 . Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi^n(y) = 0$ est une équation différentielle d'ordre n du type

$$x^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k y^{(k)} = 0,$$

(avec $a_0, ..., a_{n-1}$ des nombres réels que l'on ne cherchera pas à déterminer).

20 . Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\phi^n(y) = 0$ est $\mathcal{N}_\alpha^{n-1}$.