Devoir surveillé de Mathématiques – n° 4 –

durée: 4 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.
Les parties du problème sont dans une large mesure indépendantes.

On note I l'intervalle $]-1,+\infty[$ et on définit sur I la fonction f par:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)x} & \text{si} \quad x\in\,]-1,+\infty[\,\setminus\{0\}\\ 1 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

Partie I: Etude de f

QUESTION 1 Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

QUESTION 2 Montrer que f est strictement décroissante sur I et donner l'allure de sa courbe représentative (on pourra être amené à dériver deux fois la fonction $x\longmapsto(2x+1)\ln(1+x)-x$).

QUESTION 3 On définit sur I les fonctions g et h par :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x\in\,]-1,+\infty[\,\setminus\{0\}\\ 1 & \text{si} \quad x=0\end{cases} \quad \text{et } h(x)=\frac{1}{1+x}$$

En admettant que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et donc que f l'est également.

(a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, écrire le développement limité de g et h en 0 à l'ordre n.

(b) Préciser, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g^{(n)}(0)$ et $h^{(n)}(0)$.

(c) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)=(-1)^n n!\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$.

QUESTION 4 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=1,\ \ u_1=-\frac{3}{2}\ \text{et}\ \forall n\geq 2: u_n=-\frac{2n+1}{n+1}u_{n-1}-\frac{n}{n+1}u_{n-2}$$

(a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=(-1)^n\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$.

(b) Calculer le développement limité de f à l'ordre 5 en 0.

Partie II: Calcul d'une intégrale

On définit sur l'intervalle $[0,+\infty[$ la fonction F par:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

QUESTION 5 Etudier la monotonie de F sur $[0,+\infty[$.

QUESTION 6 Montrer que $f(x)=o\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et en déduire qu'il existe $A>0$ tel que

$$\forall t\geq A: f(t)\leq\frac{1}{t\sqrt{t}}.$$

QUESTION 7 Montrer alors que F admet une limite finie en $+\infty$.

On pose $J=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$. On définit sur l'intervalle $[0,+\infty[$ la fonction φ par:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si} \quad x\in\,]0,+\infty[\\ 1 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

QUESTION 8 Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

QUESTION 9 Montrer que $\forall x\in[0,+\infty[: 0\leq\varphi(x)\leq 1$.

On définit sur l'intervalle $[0,+\infty[$ la fonction Φ par:

$$\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

QUESTION 10 A l'aide d'un changement de variable montrer que

$$\forall x\geq 0: \Phi(x)=F(e^x-1)$$

en déduire que $J=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\Phi(x)$.

QUESTION 11 Calculer, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x>0$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}e^{-kx}$.

Question 12 Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^x te^{-kt}\mathrm{d}t$ et en déduire la valeur de

$$J_k = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-kt}\mathrm{d}t.$$

Question 13 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0$:

$$\left|\Phi(x) - \sum_{k=1}^{n} \int_0^x te^{-kt}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \varphi(t)\, e^{-nt}\mathrm{d}t.$$

Question 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on pose

$$\Phi_n(x) = \int_0^x \varphi(t)\, e^{-nt}\mathrm{d}t,$$

justifier pourquoi $Z_n = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \Phi_n(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la question (9), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq Z_n \leq \frac{1}{n}.$$

Question 15 Montrer enfin que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \left|J - \sum_{k=1}^{n} J_k\right| \leq Z_n$$

et en déduire que $J = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Partie III: Calcul d'une somme

On rappelle que si $Q(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ est une fonction polynômiale de degré n ($a_n \neq 0$) admet n racines $x_1, x_2, ..., x_n$ alors

$$Q(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Question 16 Calculer dans ce cas la somme $\sum_{k=1}^{n} x_k$ en fonction de a_n et a_{n-1}.

(ind: vous pouvez traiter les cas $n = 2$ et $n = 3$ pour avoir une idée ...)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \complement_{2n+1}^{2k+1} x^{n-k} .$$

On rappelle que la fonction cotangente est définie par $\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, pour tout x tel que $\sin x \neq 0$.

Question 17 Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, en calculant de deux manières la partie imaginaire de $\frac{e^{(2n+1)it}}{\sin^{2n+1} t}$ montrer que

$$P_n\left(\operatorname{cotan}^2(t)\right) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1} t}.$$

Question 18 Montrer que P_n admet les n racines distinctes qui sont $\left\{\operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} \mid 1 \leq k \leq n\right\}$.

Question 19 En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$.

Question 20 Pour $t \neq k\pi$ (avec $k \in \mathbb{K}$) montrer que $1 + \operatorname{cotan}^2(t) = \frac{1}{\sin^2 t}$.
En déduire une expression en fonction de n de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.

Question 21 Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que $\operatorname{cotan}(t) \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sin t}$, puis que $\operatorname{cotan}^2(t) \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{\sin^2 t}$.

Question 22 A l'aide des questions précédentes, trouver un encadrement de la forme $A_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq B_n$.

Question 23 En déduire la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geq 1}$ et donner sa limite.