*Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.*
*Les exercices suivants sont dans une large mesure indépendants. Vous pouvez les traiter dans l'ordre qui vous convient. Les questions de chaque exercice doivent être traitées dans l'ordre, mais si vous n'arrivez pas à faire une question vous pouvez admettre son résultat pour traiter les questions suivantes.*

## Exercice 1 (extrait du CNC 2010, math1 TSI)

(!) *À l'exception de la fonction $g$ de la question 3(a), représenter toutes les fonctions dans une seule figure en utilisant des couleurs différentes.*

Pour tout réel $\lambda$ , on considère la fonction

$$f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ \ x \longmapsto x + \lambda \frac{1+x^2}{e^x}$$

et l'on note $\Gamma_\lambda$ le graphe de $f_\lambda$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

**QUESTION 1** Montrer que par tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe une courbe $\Gamma_\lambda$ et une seule; la préciser à l'aide de $x_0$ et $y_0$.

**QUESTION 2** Etudier les branches infnies de $\Gamma_\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

**QUESTION 3** (a) Étudier les variations et tracer le graphe de la fonction $g$ : $x \longmapsto \dfrac{(x-1)^2}{e^x}$, défiinie sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer en fonction de $\lambda$ le nombre de points où $\Gamma_\lambda$ admet une tangente horizontale.

(c) Déterminer l'équation du lieu $\Omega$ de ces points quand $\lambda$ parcourt $\mathbb{R}$, et représenter le graphiquement.

**QUESTION 4** Etudier la concavité et déterminer les points d'inflexion de $\Gamma_\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

**QUESTION 5** Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $T_{a,\lambda}$ la tangente à $\Gamma_\lambda$ au point $(a, f_\lambda(a))$ . Montrer que si $a \neq 1$, les droites $T_{a,\lambda}$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{R}$, sont concourantes en un point dont on précisera les coordonnées. Que peut-on dire si $a = 1$?

**QUESTION 6** Dresser les tableaux de variation de $f_{-2}$, $f_3$ et $f_7$. Représenter sur une même figure $\Omega$, $\Gamma_0$, $\Gamma_{-2}$, $\Gamma_3$ et $\Gamma_7$, ainsi que les tangentes $T_{0,-2}$, $T_{0,3}$ et $T_{0,7}$. On prendra

$$\frac{5\sqrt{e}}{4} \simeq 2.1,\ \ \frac{2}{e} \simeq 0.75,\ \ \frac{10}{e^3} \simeq 0.5 \ \text{ et } \ \frac{e^3}{4} \simeq 5.$$

## Exercice 2 (extrait du CNC 2010, math1 BCPST)

Dans tout le problème on considère la suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} : P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} x^k.$$

Ainsi $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1 + x + x^2$ et $P_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

**QUESTION 7** Montrer que:

$$\forall x \neq 1 : P_n(x) = \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x}.$$

**QUESTION 8** Quels sont les réels $x$ pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente? En cas de convergence, préciser sa limite.

**QUESTION 9** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi_n(x) = 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1.$$

(a) Pour $x \neq 1$, exprimer $P_n'(x)$ en fonction de $\varphi_n(x)$.

(b) Préciser les valeurs de $P_n(1)$ , $P_n(-1)$ et celles de $P_n'(1)$ et $P_n'(-1)$ .

(c) Etudier les variations de la fonction $\varphi_n$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire celles de $P_n$; on résumera la situation dans un tableau de variations de ces deux fonctions.

(d) Justifier qu'il existe une unique valeur $\alpha_n \in ]-1, 0[$ en laquelle la fonction $\varphi_n$ s'annule puis vérifier que la fonction $P_n$ prend une valeur minimale $\beta_n$ en $\alpha_n$ et que $\beta_n > 0$.

**QUESTION 10** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dessiner dans un même graphique les courbes représentatives des fonctions $P_n$ , $P_{n+1}$ ainsi que celle de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ , définie sur $]-\infty, 1[$ ; on précisera les positions relatives de ces courbes et notamment leurs points d'intersection.

**QUESTION 11** (a) Vérifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(\alpha_n)^{2n} = \frac{1}{1+2n\,(1-\alpha_n)}$$

et justifier l'encadrement

$$\ln\left(\frac{1}{1+4n}\right) \leq 2n \ln|\alpha_n| \leq \ln\left(\frac{1}{1+2n}\right) .$$

(b) En déduire la limite de la suite $(\ln|\alpha_n|)_{n\geq 1}$ et justifier que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite à déterminer.

(c) Montrer que la suite $(\ln|\alpha_n|)_{n\geq 1}$ est équivalente à la suite $\left(-\dfrac{\ln n}{2n}\right)_{n\geq 1}$ puis en déduire un équivalent de $(1+\alpha_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**QUESTION 12** (a) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite à déterminer.

(b) Montrer que la suite $\left(\beta_n - \dfrac{1}{2}\right)_{n\geq 1}$ est équivalente à la suite $\left(\dfrac{\ln n}{8n}\right)_{n\geq 1}$ .