Devoir surveillé de Mathématiques – n° 2 –

durée: 3 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

Les exercices et problèmes suivants sont dans une large mesure indépendants. Vous pouvez les traiter dans l'ordre qui vous convient. Les questions de chaque exercice doivent être traitées dans l'ordre, mais si vous n'arrivez pas à faire une question vous pouvez admettre son résultat pour traiter les questions suivantes.

Cours et TD

Exercice 1 (Faites attention aux calculs !)

On considère, dans $\mathbb{R}^3$ les deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ donnés par les équations cartésiennes:

$$\mathcal{P}_1 : 2x - y - z = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : x + 2y - z = 2$$

QUESTION 1 Donner une représentation paramétrique de chacun des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

QUESTION 2 Donner une représentation paramétrique de leur intersection $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère la droite $\mathcal{D}_m$ de représentation paramétrique

$$\mathcal{D}_m : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + mt \\ z = -3 + 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

QUESTION 3 Pour quelle valeur de m, à-t-on $\mathcal{D}_m$ et $\mathcal{D}$ parallèles?

QUESTION 4 On suppose que $\mathcal{D}_m$ et $\mathcal{D}$ sont parallèles, donner une équation cartésienne du plan les contenant.

QUESTION 5 On suppose, dans cette question que $m = 2$.

(a) Etudier l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_2$.

(b) On considère la droite Δ d'équation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = -\dfrac{40}{3} - \dfrac{5}{3}t \\ y = -\dfrac{11}{17} \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Déterminer les points A et B d'intersections respectives de Δ avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_2$.

(ii) Calculer la distance AB puis montrer que

$$AB = \min\{MN \mid M \in \mathcal{D} \text{ et } N \in \mathcal{D}_2\}. \qquad \text{(Un peu difficile)}$$

Exercice 2

Soient a, b deux réels positifs tels que $a \leq b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}.$$

QUESTION 6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq v_n$.

QUESTION 7 Montrer que $(u_n)_n$ est croissante et que $(v_n)_n$ est décroissante.

QUESTION 8 Etablir que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.

Cette limite communne est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $\mu(a, b)$.

QUESTION 9 Calculer $\mu(a, a)$ et $\mu(0, a)$ pour $a \in \mathbb{R}_+$.

QUESTION 10 Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$, exprimer $\mu(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $\mu(a, b)$ et λ.

Problème (extrait du CNC 2010, math2 TSI)

Les deux parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes. Seulement des résultats de la partie I *peuvent être utilisés pour éviter de faire trop de calcul dans la* partie II.

Partie I

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUESTION 11 Calculer $\det(A_\lambda)$ et donner les valeurs de $\det(A_0)$, $\det(A_1)$ et $\det(A_2)$.

QUESTION 12 Calculer, par la méthode de Gauss-Jordan, la matrice A_0^{-1}.

QUESTION 13 On suppose, dans cette question, que $\lambda = 2$.

(a) Calculer le rang de A_2, puis donner la dimension du sous espace vectoriel F_2 de $\mathbb{R}^3$ des solutions du système homogène $A_2X = 0$.

(b) Donner un vecteur colonne e_1 de F_2 dont la deuxième composante est égale à 1.

QUESTION 14 On suppose, dans cette question, que $\lambda = 1$, on pose $B = (A_1)^2$.

(a) Calculer la matrice B et déterminer son rang, puis donner la dimension du sous espace vectoriel F_1 de $\mathbb{R}^3$ des solutions du système homogène $BX = 0$.

(b) On pose $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = A_1e_3$. Vérifier que e_2 et e_3 sont dans F_1, puis montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

QUESTION 15 On suppose, dans cette question, que $\lambda = 0$.

(a) Exprimer A_0e_1, A_0e_2 et A_0e_3 dans $\mathcal{B}$.
On note P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Justifier que P est inversible (*vous pouvez utiliser ce qui précède !*).

(c) Calculer P^{-1}, puis $N = P^{-1}A_0P$.

(d) On note J la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^2, J^3 puis J^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) Calculer N^n puis déduire $(A_0)^n$.

Partie II

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que

$$(a_0, b_0, c_0) = (1, 0, 0)$$

et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = & b_n - c_n \\ b_{n+1} = & a_n + 2b_n + c_n \\ c_{n+1} = & a_n - b_n + 2c_n \end{cases}$$

On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

QUESTION 16 Déterminer la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_{n+1} = MX_n.$$

QUESTION 17 Identifier la matrice transposée ${}^tM$.

On considère les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = a_n + b_n + c_n \quad \text{et} \quad w_n = a_n + c_n.$$

QUESTION 18 Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques et donner les expressions de v_n et w_n en fonction de n.

QUESTION 19 Calculer b_n en fonction de n.

QUESTION 20 Déduire alors les expressions de a_n et c_n en fonction de n.