Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

Les exercices suivants sont dans une large mesure indépendants. Vous pouvez les traiter dans l'ordre qui vous convient. Les questions de chaque exercice doivent être traitées dans l'ordre, mais si vous n'arrivez pas à faire une question vous pouvez admettre son résultat pour traiter les questions suivantes.

Rappels

Etant donnée une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : |u_n - L| < \varepsilon. \tag{1}$$

- On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : u_n > A. \tag{2}$$

Exercice 1

QUESTION 1 Déterminer une application **bijective** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

QUESTION 2 Soient p, q deux entiers non nuls. Déterminer une application **bijective** de $[\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$ dans $[\![1, pq]\!]$.

Exercice 2

QUESTION 3 Soit un entier $n \geq 2$ et soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer une application **bijective** $\phi_{n,k}$ de $[\![1, n]\!] \setminus \{k\}$ vers $[\![1, n-1]\!]$.

QUESTION 4 Dans cette question, on se propose de montrer **par récurrence**, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il n'existe pas d'application **injective** de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

(a) **Initialisation:** Vérifier le cas $n = 1$.

(b) **Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on fait l'hypothèse qu'il n'existe pas d'application injective de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. On suppose, **par absurde**, qu'il existe une application injective $f : [\![1, n+2]\!] \longrightarrow [\![1, n+1]\!]$.

En posant $k = f(n+2)$, et en utilisant la **Question 3**, construire une application injective de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ et conclure.

QUESTION 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de ce qui précède, que toute application $g : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ injective **est** bijective.

QUESTION 6 Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que s'il existe une bijection ψ de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$, alors $p = q$.

Exercice 3

Soient $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ **bijective** et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$.

QUESTION 7 Montrer **par récurrence**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{-1}([\![0, n]\!])$ est majoré.

QUESTION 8 En déduire alors qu'on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = L$.

QUESTION 9 On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n} = \ell$.

(a) On se propose de montrer, **par absurde**, que $\ell \geq 1$.

Supposons alors que $\ell < 1$, puis posons $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$.

(i) Justifier l'existence d'un entier N non nul, tel que

$$\forall n \geq N : \varphi(n) \leq n(\ell + \varepsilon).$$

(ii) Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi([\![N, qN]\!]) \subset [\![0, E(qN(\ell+\varepsilon))]\!],$$

ici $E(x)$ désigne la partie entière de x.

(iii) Justifier l'existence d'un entier q tel que $q\varepsilon > 1$.

(iv) En utilisant la **Question 6**, aboutir à une contradiction.

(b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varphi^{-1}(n)}{n} = 1/\ell$ et que donc $\ell \leq 1$.

(c) Calculer alors ℓ.

Exercice 4

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

QUESTION 10 Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

(a) Justifier l'existence d'un entier N_1 tel que

$$\forall n \geq N_1 : |u_{n+1} - u_n| < \frac{b-a}{2}.$$

(b) Montrer qu'il existe un entier m_0 tel que

$$u_{N_1} < b + v_{m_0}.$$

(c) On suppose que

$$u_{N_1} \leq a + v_{m_0}$$

montrer qu'il existe un entier $n_0 > N_1$ tel que

$$a + v_{m_0} < u_{n_0}.$$

QUESTION 11 Conclure que pour tout couple (a, b) de réels tels que $a < b$, il existe $(n_0, m_0) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$a < u_{n_0} - v_{m_0} < b.$$

On dit alors que l'ensemble $\mathcal{A} = \left\{u_n - v_m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5

QUESTION 12 Dans cette question, on se propose de montrer la propriété suivante, concernant les suites de nombres réels:

Propriété : *Toute suite croissante et majorée converge.*

Soit (u_n) une suite croissante et majorée. On note α sa borne supérieure:

$$\alpha = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Montrer que à l'aide de la définition de la limite **(1)** que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Définition : *Deux suites (u_n) et (v_n) de réels sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - v_n| = 0$.*

QUESTION 13 Soient deux suites (u_n) et (v_n) adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

(a) Montrer **par absurde** que

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n.$$

(b) En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite.

QUESTION 14 Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes? Justifier les réponses.

(a) $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

(b) $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$;

(c) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

QUESTION 15 On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(a + \frac{1}{n}\right).$$

Existe-t-il une valeur a telle que les suites soient adjacentes?