Pour tout $a \neq 0$, on considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$$

1 . Etudier les variations de la fonction

$$f : x \longmapsto x + x^2$$

et tracer son graphe ainsi que la droite $(y = x)$ dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

2 . Résoudre l'équation $f(x) = x$ et préciser le points d'intersection de la courbe de f avec la droite $(y = x)$.

Partie I

Dans cette partie on suppose que $a \in]-1, 0[$.

3 . Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in]-1, 0[$.

4 . En déduire que $(u_n)_n$ est convergente et préciser sa limite.

5 . Dans cette question, on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{u_n}.$$

a. Calculer la valeur de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (\, v_{n+1} - v_n)$.

b. En utilisant le théorème de Césaro, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n)$. Déterminer un réel k tel que $u_n \underset{n\to\infty}{\backsim} \frac{k}{n}$.

Partie II

Dans cette partie on suppose que $a \in]0, +\infty[$.

6 . Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive et croissante.

7 . Montrer alors que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n) = +\infty$.

Dans toute la suite, on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$$

8 . Prouver que $\forall n \in \mathbb{N} :\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.

9 . En déduire que la suite $(v_n)_n$ est strictement croissante.

10 . En utilisant le fait que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante et la **QUESTION 8** , montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < v_n - v_0 \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$$

11 . Conclure que la suite $(v_n)_n$ est convergente. *On* notera α sa limite.

12 . Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \leqslant \mathrm{e}^{\alpha 2^n}$.

13 . En utilisant le fait que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante et la **QUESTION 8** , montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : v_{n+p} - v_p \leqslant \frac{1}{2^p} \ln\left(1 + \frac{1}{u_p}\right)$$

14 . En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{e}^{\alpha 2^n} \leqslant 1 + u_n$$

15 . En déduire que $u_n \underset{n\to\infty}{\backsim} \mathrm{e}^{\alpha 2^n}$.

16 . On pose : $w_n = \mathrm{e}^{\alpha 2^n} - u_n$.

a. Montrer que la suite $(w_n)_n$ est bornée.

b. Montrer que la suite $(w_n)_n$ vérifie la relation:

$$2w_n - 1 = \left(w_{n+1} + w_n^2 - w_n\right) \mathrm{e}^{-\alpha 2^n}$$

c. Prouver enfin que lorsque n tend vers l'infini : $u_n = -\frac{1}{2} + \mathrm{e}^{\alpha 2^n} + o(1)$.