Problème 1

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Partie I

Dans cette partie A désigne la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1 . Montrer que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

2 . On note N la matrice $A - I_3$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N. Calculer le rang de N et déterminer une base de $\ker(g)$.

3 . Calculer N^2 et N^3 puis et montrer que N est semblable à la matrice:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on déterminera une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $N = PJP^{-1}$.

4 . Donner l'expression de A^{-1} en fonction de N.

5 . On pose $M = N^2 - N$. Déduire de la question précédente une matrice K telle que:

$$M = PKP^{-1}.$$

6 . Montrer que les matrices M et N sont semblables.

7 . Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie II

Dans toute cette partie A désigne la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

8 . Calculer A^2 et en déduire que: $\mathbb{R}^2 = \ker(f) \oplus \ker(f - Id_{\mathbb{R}^2})$.

9 . Déterminer une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

On définit l'application $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par:

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \Phi(M) = AM - MA.$$

10 . Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

11 . Calculer Φ^3 en fonction de Φ.

12 . Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et donner sa base canonique.

13 . Ecrire la matrice Ω de Φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

14 . Calculer le rang de la matrice Ω et en déduire $\dim \ker(\Phi)$ puis une base de $\ker(\Phi)$.

On note E_1 et E_2 les sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définis par:

$$E_1 = \ker(\Phi - Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) \quad \text{et} \quad E_2 = \ker(\Phi + Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}).$$

15 . En raisolvant deux systèmes linéaires déterminer une base de E_1 et une base de E_2.

16 . Déterminer une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de Φ est diagonale et écrire cette matrice diagonale.

Problème 2

Dans tout le problème $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, ..., a_n, b, c \in \mathbb{R}$. On note $D_n(a_1, a_2, ..., a_n, b, c)$ ou simplement D_n le déterminant d'ordre n suivant:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a_n \end{vmatrix}$$

Partie I

Dans cette partie que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$.

1 . Calculer D_1, D_2 et D_3.

2 . Calculer D_n dans le cas $a = c$ puis $a = b$.

3 . Calculer D_n dans le cas $b = c$.

4 . Dans cette question, on suppose $b \neq c$ et $n \geqslant 3$.

a. Etablir que $D_n - (2a - b - c)D_{n-1} + (a - b)(a - c)D_{n-2} = 0$. (On pourra par exemple opérer avec les deux dernières colonnes puis faire la même manipulation sur les lignes).

b. Résoudre l'équation $x^2 - (2a - b - c)x + (a - b)(a - c) = 0$. Puis déterminer l'ensemble des suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant la relation:

$$\forall n \geqslant 3 : u_n - (2a - b - c)u_{n-1} + (a - b)(a - c)u_{n-2} = 0.$$

c. En utilisant les valeurs de D_1 et D_2 donner l'expression de D_n en fonction de a, b et c.

Partie II

Dans cette partie, on désire calculer le déterminant D_n dans le cas général.

5 . Dans un premier temps, on suppose que $b \neq c$. On pose $D_n(x)$, le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à tous les coeffficients de D_n:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \cdots & b + x \\ c + x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ c + x & \cdots & c + x & a_n + x \end{vmatrix}.$$

a. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} : D_n(x) = \alpha x + \beta.$$

On ne demande pas dans cette question de préciser α et β.

b. Calculer α et β en évaluant $D_n(x)$ pour des valeurs judicieuses de x.

c. En déduire l'expression de $D_n = D_n(0)$.

6 . Dans cette question, on suppose que $b = c$.

a. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$h(t) = D_n(a_1, a_2, ..., a_n, b, b + t)$$

établir que h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire la valeur de D_n .