
 Devoir libre de Mathématique n°6

Dans tout le problème n est un entier, $n \geq 2$, \mathbf{E} un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} et $f \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, telle que $rg(f) = r \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\boxed{f \neq 0 \text{ et } f \circ f = 0}$.

1. Montrer que : $0 < r < n$.
2. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$. En déduire que : $2r \leq n$.
3. Soit \mathbf{F} un supplémentaire de $\ker(f)$, c'est à dire : $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \ker(f)$.

(a) Quelle est la dimension de \mathbf{F} ?

(b) On suppose que $2r < n$:

Soit \mathcal{B} une base de \mathbf{F} et soit \mathcal{B}' la famille des images par f des vecteurs de \mathcal{B} .

i. Montrer que la famille \mathcal{B}' est une famille libre.

ii. Montrer qu'il existe une famille \mathcal{B}'' de vecteurs de $\ker(f)$ telle que la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ soit une base de \mathbf{E} .

iii. Déterminer la matrice de f dans la base précédente.

(c) Que deviennent les résultats du 3°b) dans le cas où $2r = n$.

4. Application : On suppose $n = 4$ et $\mathbf{E} = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbf{E} . Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, telle que :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, 0, 1, 0) , \\ f(e_2) &= (0, -1, 0, -1) , \\ f(e_3) &= (-1, 0, -1, 0) , \\ f(e_4) &= (0, 1, 0, 1) . \end{aligned}$$

- (a) Calculer $f \circ f$, et en déduire $rg(f)$.
- (b) Déterminer un supplémentaire \mathbf{F} de $\ker(f)$, et donner une base \mathcal{B} de \mathbf{F} .
- (c) Déterminer une base $\mathcal{C}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de \mathbf{E} dans laquelle on a :

$$\begin{aligned} f(e'_1) &= e'_3 , \\ f(e'_2) &= e'_4 , \\ f(e'_3) &= f(e'_4) = 0 . \end{aligned}$$