

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On définit dans tout le problème la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_{n+1} = (x_n - 1)^2 \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

On notera t_0 le nombre $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, il vaut 0,38 à 10^{-2} près et t_1 le nombre $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, il vaut 2,62 à 10^{-2} .

Partie I

Dans cette partie on suppose que $t \in]t_1, +\infty[$.

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante à valeur dans $]t_1, +\infty[$.
2. En déduire la limite de la suite $(x_n)_n$.
3. Dans cette question, on définit la suite $(z_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : z_n = \frac{1}{2^n} \ln(x_n)$$

- a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : z_{n+1} - z_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{x_n}\right)$.
- b. En déduire que la suite $(z_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On notera α sa limite.
- c. Montrer que $z_n = \alpha + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
- d. En déduire un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers l'infini.

Partie II

Dans cette partie on suppose que $t \in [0, 1]$. Il est facile de voir que, pour tout $t \in [0, 1]$, la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est à valeur dans $[0, 1]$.

La suite $(y_n)_{n \geq 1}$ désignera sa moyenne de Césaro définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Il est connu et on l'admet, que si la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite, la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ converge vers la même limite.

4. On suppose que $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente, donner sa limite ℓ .
5. On suppose dans cette question que $t \neq t_0$, et on se propose de montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est divergente.
 - a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n \neq t_0$.
 - b. On suppose par absurde que $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente et donc de limite ℓ . On considère alors la suite $(z_n)_{n \geq 1}$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : z_n = x_n - \ell$$

- (i) Calculer alors la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n}$.
- (ii) Remarquer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$ et prouver que cela implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$.

c. Conclure.

6. On définit f et g fonctions de $[0, 1]$ dans lui même par:

$$f(x) = (x - 1)^2 \quad \text{et} \quad g = f \circ f.$$

- a. Dessiner le graphe de la fonction g (dans un repère orthonormé unité: 4 cm), en précisant les variations, la position du graphe par rapport à la droite $(y = x)$ ainsi que les points d'intersection avec cette droite.
- b. Pour cette question, on peut se contenter d'une argumentation basée sur le graphe.
Montrer, en précisant leurs limites selon les valeurs de $t \in [0, 1]$, que les suites extraites $(x_{2n})_{n \geq 1}$ et $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont convergentes pour tout $t \in [0, 1]$.
- c. En déduire que $(y_{2n})_{n \geq 1}$ et $(y_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont convergentes et identifier leur limite commune en fonction de t .
- d. Conclure que $(y_n)_{n \geq 1}$ est convergente pour toute valeur de $t \in [0, 1]$.

Partie III

Dans cette partie, on considère un réel $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$ et on écrit $1 - \frac{1}{\lambda} = a$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par:

$$u_1 = \frac{1}{1 - \lambda} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 : u_n = \frac{1}{\left(1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{1}{n}\right)} u_{n-1}$$

Avec ces hypothèses la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bien définie et vérifie $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Montrer que $\ln |u_n| - \ln |u_{n-1}| = -\frac{a}{n} + \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

8. Que dire de la limite de la suite $|u_n|$ si $a < 0$?

On suppose que $a > 0$ et on définit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n = \ln |u_n| + a \ln n$$

9. Calculer en fonction de a la limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1)(v_n - v_{n-1})$.

10. En déduire qu'il existe une constante $A > 0$ tel que

$$|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}.$$