
 Devoir libre de Mathématique n°5

Dans tout le problème \mathbf{E} est un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie ≥ 1 .
 Un endomorphisme f de \mathbf{E} est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f^p \equiv \underbrace{f \circ f \dots \circ f}_{p \text{ fois}} = 0$$

Partie I

Dans cette partie $\mathbf{E} = \mathbb{R}^3$. $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}, (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (0, x_1, x_2)$.

1. Justifier que f est linéaire.
2. Déterminer $\dim(\text{Im}(f))$ et $\dim(\text{ker}(f))$.
3. f est -il nilpotent ?

Partie II

Dans toute la suite \mathbf{E} est un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie ≥ 1 .
 Soit f et g des endomorphismes de \mathbf{E} .

1. (a) Montrer que si f est nilpotent et que f et g commutent alors $f \circ g$ est nilpotent.
 (b) Justifier que si $f \circ g$ est nilpotent alors $g \circ f$ est nilpotent.
 (c) On suppose que f est nilpotent. Montrer que l'endomorphisme $(Id_{\mathbf{E}} - f)$ est inversible.
2. Soit f un endomorphisme nilpotent de \mathbf{E} . Justifier l'existence d'un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^k = 0$. Celui-ci est appelé indice de nilpotence de l'endomorphisme nilpotent f , on le note $\nu(f)$.
 On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p = \text{ker } f^p$. On convient que $f^0 = Id_{\mathbf{E}}$.
 (a) Déterminer $N_{\nu(f)}$.
 (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $N_p \subset N_{p+1}$.
 (c) Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dim N_p = \dim N_{p+1}$, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $N_p = N_{p+q}$.

Partie III

Soit f un endomorphisme nilpotent de \mathbf{E} tel que $\nu(f) = \dim(\mathbf{E}) = n$.

On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de \mathbf{E} commutant avec f .

1. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.
2. Soit $g \in C(f)$.
 (a) Justifier qu'il existe $e \in \mathbf{E}$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.
 (b) Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$ constitue une base de \mathbf{E} .
 (c) On note a_0, a_1, \dots, a_{n-1} les composantes du vecteur $g(e)$ dans la base \mathcal{B} .
 Exprimer, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $g(f^k(e))$ comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} .
 (d) En déduire que $g = a_0 Id_{\mathbf{E}} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.
3. Conclure que $C(f) = \text{vect}\{Id_{\mathbf{E}}, f, f^2, \dots, f^{n-1}\}$.
4. Déterminer la dimension de $C(f)$.