

Pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$, on pose

$$\mathcal{A}(\theta) = \{|\sin(n\theta)| \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Préliminaire

1. Montrer que $\mathcal{A}(\theta)$ est borné admettant une borne supérieure $\alpha \in]0, 1]$.

2. Calculer α successivement pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{100}$.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $\theta = \pi \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbf{N}^*$.

3. Montrer que dans le cas q pair et p impair α vaut 1.

4. Montrer que dans le cas général, il existe un entier n tel que $|\sin(n\theta)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire que $\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Indication: étudier selon la position de θ par rapport à $\frac{\pi}{3}$ et remarquer qu'on peut se ramener au cas $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$).

Partie II

Dans cette partie, on suppose que $\theta = \pi z$ avec z **irrationnel**, i.e: $z \in]0, 1[\setminus \mathbb{Q}$ et on se propose de montrer que $\alpha = 1$.

Pour cela **on raisonne par absurde** et **on suppose que** $\alpha < 1$.

On note ε le réel tel que:

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\pi\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right)\right) = \alpha,$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = x - E(x),$$

$E(x)$ désignant la partie entière de x .

5. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} : 0 \leq f(x) < 1$ et que f est 1-périodique.

6. Montrer qu'un réel x est rationnel si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(nx) = 0$.

7. Montrer que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z} : f(px) = f(pf(x)).$$

Dans toute la suite on pose $x = \frac{z}{2}$ c'est donc un **irrationnel**. On pose

$$\mathcal{F} = \{f(nx) \mid n \in \mathbf{N}^*\}$$

et on note $a = \inf \mathcal{F}$.

8. On suppose par absurde que $a > 0$.

a. Montrer que: $\exists p \in \mathbf{N} \mid 1 \leq pa < a + 1$.

b. Justifier l'existence de $q \in \mathbf{N}^*$ tel que: $a \leq f(qx) < \frac{a+1}{p}$.

c. En déduire que $E(pf(qx)) \geq 1$ et que $f(pf(qx)) < a$.

d. Mettre en évidence une contradiction et conclure.

9. Montrer que: $\exists n_0 \in \mathbf{N}^* \mid 0 < f(n_0x) < \varepsilon$.

10. Montrer que: $\exists k_0 \in \mathbf{N} \mid \frac{1}{4} - \varepsilon < k_0 f(n_0x) \leq \frac{1}{4} - \varepsilon + f(n_0x)$.

11. En déduire que: $\frac{1}{4} - \varepsilon < f(k_0 n_0 x) < \frac{1}{4}$.

12. Déterminer en fonction de n_0 et k_0 deux entiers n et k tels que:

$$\frac{1}{4} - \varepsilon < n \frac{z}{2} - k < \frac{1}{4}$$

et aboutir à une **contradiction**.

Conclusion

13. Calculer

$$\inf \{\sup \mathcal{A}(\theta) \mid \theta \in]0, \pi[\}.$$