Théorème de l'arc capable

Par définition l'angle orienté de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non nuls est tout réel θ tel que

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}{AB.AC}$$

ce réel étant défini modulo 2π et on le note $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$. L'égalité entre angles orientés sera donc au sens de congruence modulo 2π.

Dans ce problème, on se propose de montrer des propriétés sur les angles orientés en utilisant la définition ci-dessus et la relation de Chasles,

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$$

et sans se référer aux figures géométriques. Tous les angles considérés sont orientés.

1 . Montrer que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) \text{ et que } \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}}\right) + \pi.$$

2 . Montrer la relation suivantes entre les angles d'un triangle ABC

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \pi.$$

et que si ABC est isocèle en A alors $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$.

3 . Soient M, A et B trois points distincts d'un cercle de centre Ω. Montrer en utilisant les deux questions précédente et la relation de Chasles, la formule

$$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)$$

Dans la suite on propose une démonstration du **théorème de l'arc capable**. Soit un réel $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et soient A et B deux points distincts du plan $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{C}_\alpha$ l'ensemble

$$\mathcal{C}_\alpha(A,B) = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = \alpha \right\}.$$

On note I le milieu de $[AB]$.

4 . Montrer que les relations:

$$\begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}\right) = 2\alpha \\ \Omega A = \Omega B \end{cases}$$

définissent le point Ω de manière unique. On montrera que

$$\begin{aligned} \Omega A &= \Omega B = \frac{AB}{2\left|\sin\alpha\right|} \quad \text{et que} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{I\Omega}}\right) &= \frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha \in \left]0,\pi\right[\text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{I\Omega}}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha \in \left]-\pi,0\right[. \end{aligned}$$

5 . Soit $M \in \mathcal{C}_\alpha(A,B)$, on considère le cercle $\mathcal{C}'$ défini par les trois points non alignés M, A et B, en notant Ω' le centre de $\mathcal{C}'$, remarquer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega' A},\overrightarrow{\Omega' B}}\right) = 2\alpha$ puis en déduire que $\Omega' = \Omega$ et que $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre Ω et de rayon $R = \dfrac{AB}{2\left|\sin\alpha\right|}$.

6 . Montrer que $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right) = \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$ et que la position de M par rapport à la droite (AB) dépend de la valeur de α.

7 . Conclure que $\mathcal{C}_\alpha(A,B)$ est un arc de cercle limité par A et B et faire deux figures correspondant aux cas $\alpha \in \left]0,\pi\right[$ et $\alpha \in \left]-\pi,0\right[$.

8 . Montrer que $\mathcal{C}_\alpha(A,B) \cup \mathcal{C}_{\alpha+\pi}(A,B)$ est le cercle $\mathcal{C}(\Omega,R)$ privé des deux points A et B.

Perpendiculaire commune à deux droites de l'espace

On se donne 2 droites D_1 et D_2 dans l'espace $\mathbb{R}^3$ non parallèles ayant comme vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, on note $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.

9 . Montrer que le plan P_1 contenant D_1 et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur et le plan P_2 contenant D_2 et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur se coupent en une droite Δ.

10 . Montrer que Δ est une perpendiculaire commune à D_1 et D_2 (c'est à dire Δ coupe D_1 et D_2, et est orthogonale à D_1 et à D_2).

11 . Montrer que Δ est la seule perpendiculaire commune à D_1 et D_2.

12 . Comment construire Δ dans le cas où D_1 et D_2 sont parallèlles ?

Soit $H_1 = D_1 \cap \Delta$ et $H_2 = D_2 \cap \Delta$.

13 . Montrer que pour tout $A_1 \in D_1$ et tout $A_2 \in D_2$, on a

$$d(A_1, A_2) \geqslant d(H_1, H_2).$$

$d(H_1, H_2)$ est appelée *distance entre les deux droites D_1 et D_2*.

14 . Donner des équations cartésiennes pour Δ et calculer la distance entre les deux droites D_1 et D_2 dans le cas suivant :

$$(D_1) : \begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ -x - 2y - 3z + 9 = 0 \end{cases} \quad et (D_2) : \begin{cases} -x + 2y + z + 2 = 0 \\ -2x + 4y - z + 1 = 0 \end{cases} .$$