

Problème 1

On note (\mathcal{L}) l'équation différentielle sur \mathbb{R} :

$$(\mathcal{L}) : y'' + q(x)y = 0 \quad \text{où } q(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2+x^4}.$$

1. Montrer que toute solution f de (\mathcal{L}) est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
2. Si f est solution de (\mathcal{L}) , montrer que la fonction $g : x \mapsto f(-x)$ est aussi solution de (\mathcal{L}) .
3. Soit f est solution de (\mathcal{L}) , on considère les équations différentielles

$$(\mathcal{F}) : y'' + y = (1 - q(x))f(x) \quad \text{et} \quad (\mathcal{F}_0) : y'' + y = 0.$$

Donner les solutions réelles de l'équation homogène (\mathcal{F}_0) puis celles de (\mathcal{F}) .

4. **(Inégalité de Gronwall)** Soient h une fonction de classe \mathcal{C}^1 et a continue sur \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \leq a(x)h(x).$$

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies h(y) \leq h(x) \exp\left(\int_x^y a(t)dt\right)$. (On pourra étudier la fonction $x \mapsto h(x) \exp(\int_x^y a(t)dt)$ pour y fixé).

Dans toute la suite f est une solution de (\mathcal{L}) . On pose $h = f^2 + (f')^2$.

5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \leq (q(x) - 1)h(x)$.
6. En déduire que f et f' sont bornées sur \mathbb{R}_+ .
7. Utilisant une fonction auxiliaire, montrer que f et f' sont bornées sur \mathbb{R}_- , et donc finalement sur \mathbb{R} .

On suppose dans la suite qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = f'(a) = 0$.

8. Montrer que $\forall x \in [a, +\infty[, h(x) \leq 0$. Puis que $f(x) = 0$ pour tout $x \geq a$.
9. Soit : $\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto f(a - x)$. Déterminer une fonction r continue sur \mathbb{R} telle que $\Phi'' + r\Phi = 0$.
10. En utilisant la fonction $K = \Phi^2 + (\Phi')^2$, conclure que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Problème 2

Dans tout ce problème, k est un réel donné, on note (\mathcal{E}_k) l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_k) : xy'' + 2y' + kxy = 0.$$

On étudie sur \mathbb{R}_+^* les solutions de (\mathcal{E}_k) telles que $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$.

11. Déterminer k pour que la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x}$ soit solution de (\mathcal{E}_k) sur \mathbb{R}_+^* .

On choisira, pour les deux questions suivantes, cette valeur de k .

12. Montrer que la fonction $g(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ vérifie la même équation différentielle (\mathcal{E}_k) sur \mathbb{R}_+^* .

13. Soit y une solution de (\mathcal{E}_k) sur \mathbb{R}_+^* .

- a. Montrer qu'il existe d'unique fonctions $a, b \in \mathcal{C}^\infty$ sur \mathbb{R}_+^* telles que

$$\begin{cases} y(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x) \\ y'(x) = a(x)f'(x) + b(x)g'(x) \end{cases}$$

- b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : a'(x) = b'(x) = 0$.
- c. En déduire l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}_k) sur \mathbb{R}_+^* , et la solution de (\mathcal{E}_k) qui tend vers 1 quand $x \rightarrow 0^+$.

Dans la suite on prend k quelconque.

14. Effectuer dans (\mathcal{E}_k) le changement de fonction inconnue : $y(x) = \frac{1}{x}z(x)$.
15. En déduire toutes les solutions de (\mathcal{E}_k) sur \mathbb{R}_+^* . (on distinguera 3 cas de figure selon que $k = 0, k = a^2 > 0, k = -a^2 < 0$).
16. Montrer que, pour toute valeur de k , il existe une solution ayant pour limite 1 quand $x \rightarrow 0^+$.