

Problème 1: Etude d'une fonction

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan x.$$

1. Etudier les variations de g .
2. Montrer que g s'annule une et une seule fois sur \mathbb{R} en un point α compris entre -1 et 0 (on ne demande pas de préciser la valeur de α).
3. Dessiner le graphe de g .

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x+1) \arctan x.$$

4. Calculer la dérivée de f et établir son tableau de variation.
5. Le graphe de f a-t-il des points d'inflexion ? Si oui, donner les coordonnées de ce (ou ces) point(s).
6. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ au graphe de f et la position de ce graphe par rapport à cette tangente (au voisinage de ce point).
7. Montrer les formules:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0. \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0.$$

$$\frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0.$$

$$\frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}\right) \text{ si } x < 0.$$

8. En déduire l'existence d'une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et, pour tout $x > 0$, on ait :

$$f(x) = \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Etablir un résultat analogue pour $x < 0$.

9. Quelles sont les asymptotes au graphe de f ? Préciser la position de ce graphe par rapport à ces asymptotes. Dessiner le graphe de f .

Problème 2: Une suite de fonctions

Dans tout ce problème n désigne un entier naturel non nul. On note f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par: $\begin{cases} f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}} \text{ si } x \neq 0, \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$

10. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis sur \mathbb{R}^* .
11. Calculer $f'_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, et étudier son signe.
12. Calculer les limites: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_n(x)$, puis dresser le tableau de variation de f_n .
13. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, $f_n(x)$ admet un développement asymptotique de la forme:

$$f_n(x) = x + a_n + b_n \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

déterminer les coefficients a_n et b_n .

14. En déduire l'équation de l'asymptote à la courbe de f_n en $+\infty$ et $-\infty$, en précisant la position relative de celle-ci par rapport à l'asymptote.
15. Donner l'allure de la courbe de f_1 (ie $n = 1$).
16. Montrer que pour tout n il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 1$.
17. Montrer que:
Pour tout $n : u_n \geq 1$ et Pour tout $n : u_n \ln(u_n) = n$.
18. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
19. Justifier la relation: $\ln(n) = \ln(u_n) + \ln(\ln(u_n))$.
20. En déduire que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = 1$ puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{\ln(n)}} = 1$.