

Dans tout le problème f et g désignent les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

1. Montrer que f et g admettent un prolongement par continuité en 0 et donner alors ces prolongements.

Dans toute la suite ces prolongements seront notés encore f et g et sont donc définies et continues sur \mathbb{R} .

On note G et F les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

2. Etudier les variations de G sur \mathbb{R} et Justifier pourquoi la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ est finie. On pose $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \ell$.

4. Soient deux réels a et b tels que $0 < a < b$. Montrer que l'on a:

$$\int_a^b f(t)dt = \left[\frac{1 - \cos t}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{t}\right]_a^b + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} g(t)dt.$$

5. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$F(x) = \frac{1 - \cos x}{x} + G\left(\frac{x}{2}\right).$$

et que donc on a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$.

6. Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et h une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. A l'aide d'intégrations par parties, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b h(t) \sin(xt) dt = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note h_n la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par:

$$h_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \quad \text{et} \quad h_n(0) = 2n+1.$$

Remarquons que h_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n(t) dt$$

7. Calculer I_0 puis, en calculant $I_{n+1} - I_n$ déduire I_n .

8. Soit h la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par:

$$h(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$

a. Donner un développement de h en 0 à l'ordre 1.

b. En déduire que h admet un prolongement continu et dérivable à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
On le note encore h . Préciser $h(0)$ et $h'(0)$.

c. Montrer que h est de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d. En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) h(t) dt$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt,$$

la fonction $\frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ étant prolongée par continuité en 0.

a. Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

b. A l'aide d'un changement de variable convenable, déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.