Devoir Libre de Mathématiques – n°:1 –

à rendre lundi 06 Octobre

Problème 1

On considère un ensemble non vide $\mathbb{E}$, et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{E}$. On note

$$\liminf X_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}\left(\bigcap_{p\geqslant n} X_p\right)$$

$$\limsup X_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}}\left(\bigcup_{p\geqslant n} X_p\right)$$

1 . Soit $x\in\mathbb{E}$.

a. Traduire à l'aide des quantificateurs, $x\in\liminf X_n$.

b. Traduire de même $x\in\limsup X_n$.

2 . En déduire que pour toute famille (X_n) de parties de $\mathbb{E}$ on a:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset \liminf X_n \subset \limsup X_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

On dira qu'une suite (X_n) de parties de $\mathbb{E}$ est *convergente* si $\limsup X_n = \liminf X_n$.

3 . Si $\mathbb{E}=\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, X_n=\{n\}$, est ce que la suite (X_n) est convergente?

4 . Montrer que si (X_n) est une suite croissante pour l'inclusion (i.e: $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n\subset X_{n+1}$), alors (X_n) est convergente.

5 . Trouver un exemple de suite de parties de $\mathbb{E}$ non convergente.

6 . Montrer que si la suite (X_n) converge, alors la suite des complémentaires $(Y_n=\overline{X_n})$ est aussi convergente.

7 . Si (X_n) et (Y_n) sont deux suites de parties de $\mathbb{E}$, montrer que:

$$\limsup(X_n\cap Y_n)\subset(\limsup X_n)\cap(\limsup Y_n)$$

8 . En déduire que si (X_n) et (Y_n) sont deux suites convergentes, alors la suite $(Z_n=X_n\cap Y_n)$ est également convergente.

9 . Montrer que si (X_n) et (Y_n) sont deux suites convergentes, alors la suite $(Z_n=X_n\cup Y_n)$ est convergente.

Problème 2: Méthode de Cardan

Dans toute la suite, on considère l'équation:

$$x^3+px+q=0 \tag{1}$$

p et q étant deux nombres complexes

Partie I : Soit α l'une des racines (réelles ou complexe) de (1).

10 . Montrer qu'il existe $(u,v)\in\mathbb{C}$ vérifiant :

$$u+v=\alpha \text{ et } uv=-\frac{1}{3}p.$$

11 . Exprimer u^3+v^3 et u^3v^3 en fonction de p et q et endéduire que u^3 et v^3 sont racines de l'équation:

$$Z^2+qZ-\frac{1}{27}p^3=0 \tag{2}$$

Partie II : Soient inversement z_1 et z_2 les racines (réelles ou complexes) de l'éqution (2).

12 . Montrer que l'on peut choisir une racine cubique (dans $\mathbb{C}$) u de z_1 et une racine cubique v de z_2 telles que $uv=-\frac{1}{3}p$.

13 . Vérifier que les trois racines α,β et γ de l'équation (1) sont:

$$u+v, uj+vj^2 \text{ et } uj^2+vj\text{ , désignant le complexe } -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

14 . Dans cette question, on suppose p et q réels et on pose $D=q^2+\frac{4}{27}p^3$ qu'on suppose positif ou nul.

a. Exprimer z_1 et z_2 en fonction de q et D.

b. Montrer que l'on peut choisir u et v réels et exprimer les racines de (1) en fonction de q et D. Vérifier que l'une de ces racines est réelle.

Exemples : Résoudre les équations suivantes:

(a) $x^3+3x+1=0$ (b) $x^3-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}x+1=0$ (c) $x^3+3x+2i=0$.

B. Seddoug