Suites de nombres réelles

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

I Généralités

I.1 Algèbre des suites de nombres réels

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels de deux lois de compositions internes et d'une loi externe:

- L'addition des suites définie par: $\forall (u_n),(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)+(v_n) = (u_n+v_n)$.
- La multplication tion des suites définie par: $\forall (u_n),(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)\times(v_n) = (u_n \times v_n)$.
- La multiplication par un scalaire définie par: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lambda.(v_n) = (\lambda v_n)$.

Ainsi définies ces lois vérifient les proopriétés suivantes.

Propriétés

P I.1 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+)$ est un groupe abélien, d'élément neutre la suite nulle.

P I.2 $\times$ est commutative, associative et admet la suite constante égale à 1 pour élément neutre.

P I.3 $\times$ est distributive par rapport à $+$.

Définition 1 On résume les propriétés ci-dessus, en disant que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\times)$ est un anneau commutatif.

P I.4 La loi externe "." vérifie les propriétés suivantes $\forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- $\lambda.(u+v) = \lambda.u + \lambda.v. \qquad (\lambda+\mu).u = \lambda.u + \mu.u.$
- $\lambda.(u\times v) = (\lambda.u)\times v = u \times (\lambda.v). \qquad (\lambda\mu).u = \lambda.(\mu.u).$

Définition 2 On résume toutes les propriétés ci-dessus, en disant que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\times,.)$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$.

I.2 Relation d'ordre

On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ d'une relation d'ordre naturelle, en posant:

$$\forall (u_n),(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n) \leq (v_n) \iff \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n.$$

Définition 3 (à partir un certain rang) On dit qu'une propriété $P(n)$ est vérifiée *à partir un certain rang* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p : P(n)$ est vrai.

Exercice 1 Est ce que la relation $(u_n) \leq (v_n)$ à partir d'un certain rang définie une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Définition 4 On dit qu'une suite (u_n) est

- majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M$.
- minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$tel que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq m$.
- bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M$.

Remarque 1 Si $(u_n) \leq (v_n)$ à partir d'un certain rang, alors

- (v_n) majorée $\Longrightarrow (u_n)$ majorée.
- (u_n) minorée $\Longrightarrow (v_n)$ minorée.

Exemple 1 $u_n = (-1)^n$ est bornée.
$u_n = n^2$ n'est majorée.

Proposition 1 L'ensemble des suites bornées est stable par les lois $+$ et $\times$.

I.3 Suites monotones

Définition 5 (u_n) est dite *croissante* (resp. strictement croissante) si

$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$.

(u_n) est dite *décroissante* (resp. strictement décroissante) si

$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$.

Si (u_n) est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est *monotonne.*

Exemple 2 $u_n = n$ est strictement croissante.
$u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est strictement décroissante.
$u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

Propriétés

P I.5 La somme de deux suites croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissantes).

P I.6 Si $\lambda > 0$ et (u_n) croissante alors $\lambda.(u_n)$ est croissante.

P I.7 si (u_n) croissante alors $(-u_n)$ est décroissante.

II Limite d'une suite

II.1 Définitions - exemples

Définition 6 étant donné un nombre réel a, on dit que (u_n) admet a pour limite si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : |u_n - a| \leq \varepsilon \tag{II.1}$$

lorsqu'un tel nombre a existe, on dit que la suite (u_n) est *convergente,* ou quelle admet une limite finie. On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.

S'il n'existe aucun réel a vérifiant (II.1), on dit que la suite (u_n) est *divergente.*

Théorème II.1 (unicité de la limite) Si une suite est convergente sa limite est unique.

Preuve: Par absurde, si $a < a'$ vérifient tous les deux (II.1), alors avec $\varepsilon = \dfrac{a' - a}{3}$, on aboutit à une contradiction ▪

Proposition 2 $\lim u_n = a \Longleftrightarrow \lim(u_n - a) = 0$

Preuve: C'est la définition ▪

Exemple 3 Toute suite constante à partir d'un certain rang est convergente.
$u_n = \dfrac{1}{n}$. $\lim u_n = 0$.
$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. $\lim u_n = 0$
$u_n = n$. (u_n) n'est pas convergente.
$u_n = (-1)^n$. (u_n) n'est pas convergente.

On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que

- $\lim u_n = +\infty$ ou que (u_n) diverge vers $+\infty$ si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : u_n \geq A.$$
- $\lim u_n = -\infty$ ou que (u_n) diverge vers $-\infty$ si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : u_n \leq A.$$

Remarque 2 (unicité) Le résultat d'unicité de la limite se prolonge aussi au cas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 4 $u_n = n$. (u_n) converge vers $+\infty$.
$u_n = \sqrt{n}$. (u_n) converge vers $+\infty$.

Remarque 3 Une suite qui n'est pas convergente peut ne pas admettre de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$
Exemple: $u_n = (-1)^n$.

II.2 Propriétés des suites convergentes

Théorème II.2 Toute suite convergente est bornée.

Preuve: Avec $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite , il existe N tel que $\forall n \geq N : |u_n - a| \leq 1$. Donc (u_n) est majorée par $\max\{u_0; u_1; ...; u_{N-1}; |a| + 1\}$ ▪

Remarque 4 Si $\lim u_n = +\infty$ alors (u_n) n'est pas majorée. Par contre si (u_n) n'est pas majorée on ne peut pas conclure que $\lim u_n = +\infty$.

Théorème II.3 Si $\lim u_n = a > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
De même si $\lim u_n = a < 0$, alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.
Plus généralement, si (u_n) converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$, alors pour tous réels x, y tels que $x < l < y$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow x \leq u_n \leq y.$$

Preuve: Si $a > 0$, avec $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : u_n \geq a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2} > 0$ ▪

Remarque 5 Si $\lim u_n = 0$ on peut rien dire sur le signe de u_n.
Exemple: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 2 Ecrire à l'aide des quantificateurs les propriétés suivantes:

1. (u_n) ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$.
2. (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$.
3. (u_n) diverge.

II.3 Opérations sur les suites convergentes

Théorème II.4 Soient (u_n) et (v_n) convergentes telles que $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$.

(i) $(u_n) + (v_n)$ est convergente et $\lim(u_n + v_n) = a + b$.

(ii) $(u_n)(v_n)$ est convergente et $\lim(u_n v_n) = ab$.

(iii) Si en plus $b \neq 0$, alors $\dfrac{u_n}{v_n}$ est définie à.p.c.r et on a $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$.

Preuve: utiliser la définition ▪

Théorème II.5 Si (u_n) bornée et $\lim v_n = 0$, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Preuve: Si $|u_n| \leq A \neq 0$ pour tout n. Pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $|v_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{A}$, pour tout $n \geq N$. Et donc $|u_n v_n| \leq \varepsilon$, pour tout $n \geq N$. cqfd ▪

Exemple 5 $u_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{n}$.

Lien avec les limites de fonctions

Théorème II.6 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \in \bar{I}; l \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit (u_n) une suite à termes dans I. Si $\lim u_n = a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim f(u_n) = l$.

Remarque 6 Ce théorème est utile pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en a. Il suffit pour cela d'exhiber deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a mais telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ne convergent pas vers la même limite.

Remarque 7 On utilise également ce théorème dans l' étude des suites récurrentes

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, et si la fonction f est continue au point l, alors la limite de la suite récurrente est un point fixe de la fonction :

$$l = f(l)$$

Exemple 6 Montrez que la fonction définie par $f(x) = sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite lorsque $x \longrightarrow 0^+$.

Exercice 3 Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique. Montrez que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe et est finie, alors la fonction f est constante.

Théorème II.7 Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. La fonction f est continue au point a si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Cas de limites infinies

On résume les propriétés dans le tableau suivant.

$\lim u_n$	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$a > 0$	0
$\lim v_n$	$a > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\pm\infty$	$+\infty$	?	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u_n.v_n)$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	?
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\pm\infty$	?	?	0	0

Exemple 7
1. Limite de suite géométrique
2. Limite de série géométrique
3. Limite de suite arithmétique
4. Limite de suite polynômiale et rationnelle

II.4 Propriétés avec la relation d'ordre

Théorème II.8 Soient (u_n) et (v_n) convergentes telles que $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$.
Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors $a \leq b$.

Remarque 8 Même si on a $u_n < v_n$, on ne peut conclure que $a < b$.
Exemple: $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{2n}$.

Corollaire II.9 Soient une suite (u_n), un réel l. S'il existe une suite (α_n) telle que:

(i) $\lim \alpha_n = 0$,
(ii) $|u_n - l| \leq \alpha_n$ à partir d'un certain rang.

Alors (u_n) converge vers l.

Preuve: Pour $\varepsilon > 0$, on considère N tel que $|u_n - l| \leq \alpha_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ ∎

Théorème II.10 On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que

(i) $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang,

(ii) Les deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et $\lim v_n = \lim w_n$.
Alors la suite (u_n) est convergente et $\lim u_n = \lim v_n = \lim w_n$.

De même, si

(i') $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang,

(ii') $\lim v_n = +\infty$.
Alors $\lim u_n = +\infty$.

Preuve: Pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $l - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$ ∎

III Théorèmes d'existence

III.1 Suites extraites

Définition 7 Etant donné deux suites (u_n) et (v_n). On dit que (v_n) est une sous suite (ou suite extraite) de (u_n), s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemple 8 (u_{n+1}) et (u_{2n}) sont extraites de (u_n).

Théorème III.1 Si (u_n) est convergente de limite l, alors toute sous suite de (u_n) est convergente de même limite l.

Remarque 9 La réciproque est fausse...
Exemple: $u_n = (-1)^n$, $u_{2n} = 1$ donc (u_{2n}) convergente alors que (u_n) diverge.

Remarque 10 Pour montrer qu'une suite diverge, on peut donner deux sous suites qui convergent vers deux limites différentes. Par contre on a le résultat particulier suivant.

Théorème III.2 Si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l, alors (u_n) est convergente et $\lim u_n = l$.

Preuve: Pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n \geq N : |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$,
Donc $\forall n \geq 2N+1 : |u_n - l| \leq \varepsilon$, donc $\lim u_n = l$ ▪

III.2 Cas de suites monotones

Théorème III.3

1. Si (u_n) est croissante majorée, alors elle est convergente et on a
$$\lim u_n = \sup_n u_n.$$
2. De même si (u_n) est décroissante minorée, alors elle est convergente et on a
$$\lim u_n = \inf_n u_n.$$
3. Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
4. Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Preuve: Utiliser la caractérisation de la borne sup (resp inf) et la monotonie ▪

Exemple 9

1. $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$. (ind: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$).
2. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, (u_n) n'est pas majorée. (ind: $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$).

III.3 Suites adjacentes

Définition 8 Deux suites (a_n) et (b_n) sont dites *adjacentes* si

(i) (a_n) et (b_n) sont monotones de sens contraire.

(ii) La suite $(a_n - b_n)$ converge vers 0.

Exemple 10

1. $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}$; $b_n = a_n + \frac{1}{n.n!}$.
2. Soient a, b tels que $0 < a < b$. On définit (u_n) et (v_n) par
$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = b, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n). \end{cases}$$
(Montrer par récurrence que: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$).

Théorème III.4 Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Preuve: On suppose $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$ et $(b_n - a_n) \longrightarrow 0$. On montre que
$$\forall n, p \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n.$$
En effet, si on suppose par absurde qu'il existe (n_0, p_0) tel que $a_{n_0} > b_{p_0}$, alors puisque
$$\forall n \geq n_0, p \geq p_0 \in \mathbb{N} : b_p \leq b_{p_0} < a_{n_0} \leq a_n.$$
Donc
$$\forall n \geq \max(n_0, p_0) \in \mathbb{N} : a_n - b_n \geq a_{n_0} - b_{p_0} > 0$$
ce qui contredit le fait que $\lim(a_n - b_n) = 0$.
On conclut donc que (a_n) est majorée et (b_n) est minorée, elles sont donc convergentes et ont la même limite. cqfd ▪

Exemple 11

1. Dans l'exemple 1 ci-dessus $\lim a_n = \lim b_n = e$.
2. Dans l'exemple 2 ci-dessus $\lim u_n = \lim v_n = \mu(a, b)$ appelé moyenne arithmético-géométrique de a et b.

III.3.1 Segments emboités

Définition 9 Une suite (I_n) de segments de $\mathbb{R}$ est dite *emboités* si $\forall n : I_{n+1} \subset I_n$.

Remarque 11 Si on pose $I_n = [a_n, b_n]$, alors $(a_n) \nearrow$ et $(b_n) \searrow$.

Théorème III.5 Si (I_n) est une suite de segments emboités alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.
En plus si la suite des longueurs $(\text{mes}(I_n))$ converge vers 0, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Preuve: Si en pose $I_n = [a_n, b_n]$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [a, b]$, où $a = \lim a_n$ et $b = \lim b_n$ ▪

III.3.2 Méthode de dichotomie

On suppose qu'il existe une solution unique $\alpha \in [a, b]$ de l'équation $f(x) = 0$, et que $f(x) < 0$ sur $[a, \alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha, b]$.
La méthode de dichotomie consiste à construire les deux suites
$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = b \text{ et pour tout } n : \\ \begin{array}{l} v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ u_{n+1} = u_n \end{array} \quad \text{si } f(u_n) f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0, \\ \begin{array}{l} v_{n+1} = v_n \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{array} \quad \text{si } f(u_n) f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0. \end{cases}$$
si $f(u_n) f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) = 0$ alors la solution est $\frac{u_n + v_n}{2}$, et l'algorithme s'arrête (ie. les deux suites sont stationnaires à partir d'un certain rang).

Proposition 3 Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. La limite commune des deux suites est la racine α de l'équation $f(x) = 0$.

Preuve: On a $u_{n+1} - u_n = 0$ ou $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$. Pour étudier la monotonie de (u_n) et (v_n), il suffit d'étudier le signe de $(v_n - u_n)$.

On a $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$, donc $sgn(v_n - u_n) = sgn(b - a) > 0$.

On conclut donc que $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$ et $\forall n : u_n \leq v_n$. En plus la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes. notons $l = \lim u_n = \lim v_n$. on a $\forall n : u_n \leq l \leq v_n$, si on suppose, par absurde, que $l < \alpha$, alors il existe n tel que $u_n \leq l \leq v_n < \alpha$, donc $f(u_n)f(v_n) > 0$ ce qui contrdit la définition des deux suites ▪

III.4 Théorème de Bolzano[1]-Weierstrass[2]

Théorème III.6 De toute *suite bornée* de nombres réels, on peut extraire une sous suite qui converge.

Preuve: On note $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des valeurs de la suite. Et on pose $a = \inf U$, $b = \sup U$. on a donc $\forall n : a \leq u_n \leq b$.

<u>1^er cas:</u> U fini alors $\exists n_0$ tel que $I = \{n \mid u_n = u_{n_0}\}$ soit infini, on considère alors $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ strictement croissante, la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est stationnaire donc converge.

<u>2^ème cas:</u> U infini, on construit alors deux suites (a_n) et (b_n) en posant

$$\begin{cases} a_0 = a, b_0 = b \text{ et pour tout } n : \\ \begin{array}{l} b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ a_{n+1} = a_n \end{array} \quad \text{si } \left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right] \cap U \text{ infini,} \\ \begin{array}{l} b_{n+1} = b_n \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{array} \quad \text{si non. Dans ce cas } \left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right] \cap U \text{ infini.} \end{cases}$$

On a alors $\forall n : [a_n, b_n] \cap U$ infini. Et les deux suites sont adjacentes, notons l leur limite commune.

On construit enfin $(u_{\varphi(n)})$ par

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \varphi(n) > \varphi(n-1) \text{ tel que } u_{\varphi(n)} \in I_n \cap U \end{cases}$$

la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers l. ▪

Conséquence (Théorème de Heine)

On rappelle le théorème de Heine:

Théorème III.7 (De Heine) Soit $f : I =$Soit $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue ($a < b$ deux réels), alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

[1]Tchèque (1781-1848)
[2]Allemand (1815-1897)

Preuve: Supposons par absurde que f n'est pas uniformément continue, donc

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n, y_n \in [a, b] \text{ tels que}$$
$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

La suite (x_n) étant bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge vers un certain $c \in [a, b]$, et comme $\left|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right| \leq \dfrac{1}{\varphi(n)}$ et $\varphi(n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $(y_{\varphi(n)})$ converge vers c.

f étant continue donc $(f(x_{\varphi(n)}))$ et $(f(y_{\varphi(n)}))$ convergent vers $f(c)$ ce qui contredit le fait que $\left|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\right| > \varepsilon$ ▪

IV Relations de comparaison

IV.1 Domination

Définition 10 On dit qu'une suite (u_n) est *dominée* par une suite (v_n), s'il existe $\lambda > 0$ tel que $|u_n| \leq \lambda |v_n|$ à partir d'un certain rang.
On onte alors $u_n = O(v_n)$ (on lit u_n égale grand o de v_n).

Remarque 12 Si (v_n) ne s'annule pas, on a : $u_n = O(v_n) \Longleftrightarrow \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ bornée.

Exemple 12

1. $u_n = O(1)$ signifie que (u_n) est bornée.
2. $u_n = O(\lambda u_n)$, pour tout $\lambda \neq 0$.
3. Si $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ existe alors $u_n = O(v_n)$
4. $u_n = 2n; v_n = 5n + 1$. $u_n = O(v_n)$.

Propriétés

P IV.1 $\begin{array}{l} u_n = O(v_n) \\ v_n = O(w_n) \end{array} \Longrightarrow u_n = O(w_n)$.

P IV.2 $\begin{array}{l} u_n = O(w_n) \\ v_n = O(w_n) \end{array} \Longrightarrow u_n + v_n = O(w_n)$. et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda u_n = O(w_n)$.

P IV.3 $\begin{array}{l} x_n = O(u_n) \\ y_n = O(v_n) \end{array} \Longrightarrow x_n y_n = O(u_n v_n)$.

P IV.4 $\begin{array}{l} u_n = O(v_n) \\ \lim v_n = 0 \end{array} \Longrightarrow \lim u_n = 0$.

Exercice 4 Si $u_n > 0$ et $v_n > 0$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \Longrightarrow u_n = O(v_n)$.

IV.2 Prépondérance

Définition 11 On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) s'il existe une suite (ε_n) telle que

$$u_n = \varepsilon_n v_n \text{ et } \lim \varepsilon_n = 0.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$, on lit *"petit o"*.

Remarque 13

1. Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors
$$u_n = o(v_n) \Longleftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 0.$$
2. Si (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas (à partir d'un certain rang) alors
$$u_n = o(v_n) \Longleftrightarrow \frac{1}{v_n} = o\left(\frac{1}{u_n}\right).$$
3. $u_n = o(v_n) \Longrightarrow u_n = O(v_n)$.
4. $u_n = o(1)$ signifie que $\lim u_n = 0$.

Propriétés

P IV.5 $\begin{matrix} u_n = O(v_n) \\ v_n = o(w_n) \end{matrix} \Longrightarrow u_n = o(w_n)$. et $\begin{matrix} u_n = o(v_n), \\ v_n = O(w_n) \end{matrix} \Longrightarrow u_n = o(w_n)$.

P IV.6 $\begin{matrix} u_n = o(w_n) \\ v_n = o(w_n) \end{matrix} \Longrightarrow u_n + v_n = o(w_n)$. et $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda u_n = o(w_n)$.

P IV.7 $\begin{matrix} x_n = o(u_n) \\ y_n = O(v_n) \end{matrix} \Longrightarrow x_n y_n = o(u_n v_n)$.

Exemple 13

1. $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$; $\frac{1}{n \ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. <u>Suites de référence:</u> $n^n; n!; a^n; n^\alpha; (\ln n)^\beta$, $a > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (a) $n! = o(n^n)$.
   (b) $a^n = o(n!)$.
   (c) $n^\alpha = o(a^n)$ si $a > 1$. <u>Exercice:</u> Etudier le cas $0 < a < 1$.
   (d) $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$ si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Preuve: (a) On pose $v_n = \frac{n!}{n^n}$ et on étudie $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. On a $\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{e} < 1$, donc $\lim v_n = 0$.
(b) et (c) même démo.
(d) $\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, car $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ∎

IV.3 Équivalence

Définition 12 Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *équivalentes* s'il existe une suite (a_n), telle que

$$u_n = a_n v_n \text{ et } \lim a_n = 1.$$

On note alors $u_n \sim v_n$.

Remarque 14

1. Si $\lim a_n = 1$ alors $\lim \frac{1}{a_n} = 1$ et $v_n = \frac{1}{a_n} u_n$. L'équivalence est donc symétrique.
2. Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors
$$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 1.$$
3. Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors
$$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}.$$
4. Si $a_n \longrightarrow 1$ alors $\varepsilon_n = a_n - 1 \longrightarrow 0$, donc
$$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n = o(v_n) \Longleftrightarrow v_n - u_n = o(u_n).$$

Exemple 14

1. Si $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$ alors $u_n \sim l$.
2. $\frac{2n+1}{3n^2+2} \sim \frac{2}{3n}$...

Propriétés

P IV.8 La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

P IV.9 Si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang. De plus si $\lim u_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim v_n = l$.

P IV.10 $\begin{matrix} x_n \sim u_n \\ y_n \sim v_n \end{matrix} \Longrightarrow x_n y_n \sim u_n v_n$.

Exercice 5

1. Si (u_n) et (v_n) sont à termes > 0, alors
$$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha, \text{ pour tout } \alpha \neq 0.$$
2. $e^{u_n} \sim e^{v_n} \Longleftrightarrow (u_n - v_n) \longrightarrow 0$.
3. Si (u_n) et (v_n) sont à termes > 0, alors
$$u_n \sim v_n \text{ et } \lim v_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{1\} \Longleftrightarrow \ln u_n \sim \ln v_n.$$

V Suites de nombres complexes

V.1 Généralités:

Soit (z_n) une suite de nombres complexes. On appelle partie réelle de (z_n) (resp. partie imaginaire) la suite $(\mathrm{Re}\,(z_n))_n$ (resp. $(\mathrm{Im}\,(z_n))_n$) i.e: si $z_n = \mathrm{Re}\,(z_n) + i\,\mathrm{Im}\,(z_n)$.

Remarque 15 On définit pour les suites complexes les opérations $+, \times$ et $\cdot$. Et $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \times, \cdot)$ vérifie les mêmes propriétés que $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times, \cdot\right)$, on dit donc que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{C}-$algèbre commutative.

Définition 13 Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite bornée si la suite réelle $(|z_n|)_n$ est majorée i.e: $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |z_n| \leq M$

Exemple 15 les suites $(z_n = i^n)$, $z_n = e^{in\frac{\pi}{5}}$ sont bornées alors que $(z_n = ni + 1)$ est non bornée.

Proposition 4 Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée ssi $(\mathrm{Re}\,(z_n))_n$ $(\mathrm{Im}\,(z_n))_n$ sont bornées dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 16 Comme dans le cas réelle, l'ensemble des suites bornées est stable pour les lois $+,\times,\cdot$.

V.2 Limite d'une suite complexe

Définition 14 Soit $\ell \in \mathbb{C}$, et $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $\lim z_n = \ell$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |z_n - \ell| < \varepsilon$$

Remarque 17

1. L'unicité de la limite.
2. $\lim z_n = \ell \Longleftrightarrow \lim |z_n - \ell| = 0$.
3. $\lim z_n = 0 \Longleftrightarrow \lim |z_n| = 0$.
4. Si limite $z_n = \ell$ alors $\lim |z_n| = |\ell|$.

Remarque 18 Toutes les propriétés démontrées sur les suites réelles ne faisant pas intervenir d'inégalités sont encore valables pour les suites complexes (les démonstrations n'utilisent que l'inégalité triangulaire). En particulier, on a les théorèmes généraux sur les sommes, produits, quotients, l'unicité de la limite, une suite convergente est bornée. On ne dispose plus par contre du passage à la limite dans les inégalités, du théorème de la limite monotone, ni du théorème des gendarmes. Le théorème suivant permet de montrer qu'une suite de complexes converge vers une limite.

Théorème V.1 Soit (z_n) une suite de complexes et $a \in \mathbb{C}$. Si (α_n) est une suite de réels vérifiant

- $|z_n - a| \leq \alpha_n$ à partir d'un certain rang,

- $\alpha_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$

  alors $z_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} a$.

Théorème V.2 Soit $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell = \ell_1 + i\ell_2$, alors

$$\lim z_n = \ell \Longleftrightarrow (\lim x_n = \ell_1 \text{ et } \lim y_n = \ell_2)$$

Remarque 19 Ceci nous permet de se ramener a l'étude de deux suites réelles au lieux d'une complexe.

Exemple 16

1. Suite géometrique $q \in \mathbb{C}$, $z_n = q^n$:
   - Si $|q| < 1$ alors $\lim z_n = 0$.
   - Si $|q| > 1$ alors $\lim |z_n| = +\infty$.
   - Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, on pose $q = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $\theta \neq 0$, on a donc $q^n = e^{in\theta}$

Exercice 6 Montrer que dans ce cas (q^n) n'admet pas de limite.

Remarque 20 Si $\mathrm{Re}\,(z_n)$ (ou $\mathrm{Im}\,(z_n)$) n'est pas convergente alors la suite (z_n) ne l'est pas aussi.

Exemple 17 Considérons la suite $z_n = \dfrac{n^2 + i\,(n^2+1)}{2n^2+5n+1} = \dfrac{n^2}{2n^2+5n+1} + i\dfrac{n^2+1}{2n^2+5n+1}$.

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2n^2+5n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2+5n+1} = \dfrac{1}{2}$,
Donc $\lim z_n = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

Remarque 21 Les opérations sur les limites des suites convergentes sont les mêmes que dans le cas des suites réelles.

V.3 Relations de comparaisons:

On étend les définitions relatives de comparaisons aux suites complexes. Si $(u_n)\,(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

- on dit que $u_n = O\,(v_n)$ si $\dfrac{u_n}{v_n}$ bornée; ie $u_n = b_n v_n$ avec (λ_n) bornée.
- on dit que $u_n = o\,(v_n)$ si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$; ie $u_n = b_n v_n$ avec $b_n \longrightarrow 0$.
- on dit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} v_n$ si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. ie $u_n = w_n v_n$ avec $w_n \longrightarrow 1$.

Remarque 22 $\lim z_n = \ell \in \mathbb{R} \nRightarrow (z_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. exemple: $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{i}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1...$