Nombres réels

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

I Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels

La structure de corps sur $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est muni de deux l.c.i $+$ et $\times$, qui vérifient les propriétés:

P I.1 $+$ est commutative, associative, admet 0 pour élément neutre et tout réel x est symétrisable de symétrique, son opposée, $-x$.

On dit alors que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien.

P I.2 $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe abélien, d'élément neutre 1, et le symétrique d'un réel x non nul est son inverse$\frac{1}{x}$.

En plus entre les lois $+$ et $\times$, on a la propriété suivante, appelée distributivité de $\times$ par rapport à $+$:

P I.3 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $x(y+z) = xy + xz$.

Définition 1 On résume les trois propriétés ci-dessus, en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps "commutatif".

Remarque 1 La structure de corps sur $\mathbb{R}$, génère toutes les propriétés et règles de calcul connues sur $\mathbb{R}$(simplifications, identités remarquables...).

I.1 La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

- $\mathbb{R}$ est totalement ordonné par la relation d'ordre naturelle $'\leq'$, définie par:
  $x \leq y \Longleftrightarrow (y - x) \in \mathbb{R}_+$.
- Cette relation d'ordre est compatible avec la structure de corps, dans le sens suivant:

P I.4 $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \Longleftrightarrow -x \leq 0$.

P I.5 $\forall x, y \in \mathbb{R} : (0 \leq x \text{ et } 0 \leq y) \Longrightarrow 0 \leq x + y \text{ et } 0 \leq xy$.
En général: $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq t \end{array}\right\} \Longrightarrow x + z \leq y + t.$$

Si en plus $x, y, z, t \in \mathbb{R}_+$,alors

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq t \end{array}\right\} \Longrightarrow xz \leq yt.$$

P I.6 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z \Longleftrightarrow x \leq y$.

I.2 Valeur absolue

Définition 2 Pour réel x le réel positif

$$|x| = \max\{-x; x\} = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leq x \\ -x \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

est appelé la valeur absolue de x.

Remarque 2 Par définition, on a: $\left[\begin{array}{l} x \leq |x|. \\ -x \leq |x|. \\ |x| = |-x|. \end{array}\right.$

Exemple 1 $|0| = 0; |-1| = |1| = 0$.

I.2.1 Propriétés

P I.7 $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

P I.8 $\forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x|\,|y|$, si en plus $y \neq 0$, on a $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

P I.9 (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$.

Preuve: Pour l'inégalité triangulaire, considérer $|x+y|^2$ et remarquer que $xy \leq |xy|$ ▪

I.2.2 Distances entre deux réels

- La distance entre deux points $M(x)$ et $N(y)$ de la droite numérique est $|y - x|$.

P I.10 $\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Exercice 1 Montrer que si $|x| \leq k \leq 1$ alors $1 - k \leq |1 + x| \leq 1 + k$.

II Borne supérieure et inférieure

II.1 Axiome de la borne supérieure

Définition 3 Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, le plus petit des majorants de A est appelée sa *borne supérieure* et est notée $\sup A$. Ainsi on a:

$$\alpha = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : a \leq \alpha, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha. \end{cases}$$

Remarque 3 Par définition, on a:

$$\sup A = \min\{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ majorant de } A\}$$

donc si la borne supérieure existe elle est unique.

De la même façon, on définit la *borne inférieure* d'une partie A minorée de $\mathbb{R}$ par:

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A : \beta \leq a, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : \beta \leq a < \beta + \varepsilon. \end{cases}$$

Et on a la même remarque concernant l'unicité et on a:

$$\inf A = \max \{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minorant de } A\}.$$

Proposition 1 Si A est majoré alors $-A = \{-a \mid a \in A\}$ est minoré, et on a:

$$\inf(-A) = -\sup(A).$$

Preuve: Utilise les définitions ∎

L'une des propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$ est l'existence de la borne supérieure. Il s'agit d'une propriété caractéristique dans le sens où cette propriété fait partie de la définition de $\mathbb{R}$ ou des axiomes régissant la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On admet alors le résultat suivant:

Théorème II.1 (Axiome de la borne sup) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exemple 2 $\sup\,]a,b[= \sup\,]a,b] = b$; $\inf\,[a,b[= \inf\,]a,b[= a$. a et b sont des réels.

Corollaire II.2 Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Preuve: utlise la proposition (1) et le théorème (II.1) ∎

Remarque 4 On peut donc conclure que toute partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ admet une borne sup et une borne inf.

II.2 Droite numérique achevée

On définit $\overline{\mathbb{R}}$ en ajoutant à $\mathbb{R}$ deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$. L'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

ainsi obtenu, est appelé *droite réelle achevée.* Les éléments $-\infty$ et $+\infty$ sont non réels...

Sur le nouvel ensemble ainsi défini, on prolonge la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty.$$

On peut alors désigner le nouvel ensemble sous la forme d'intervalle: $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

L'intérêt de la droite achevée réside dans le fait que nombre de résultats dans $\mathbb{R}$ est lié au fait d'être borné ou pas. Ainsi, si A est majoré, on peut définir $s = \sup A$. Si A est non majoré, on posera $\sup A = +\infty$. $+\infty$ n'est autre que la borne supérieure de A, mais dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$. On a alors le résultat suivant, généralisant l'axiome de la borne sup.

Théorème II.3 Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne sup et une borne inf dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve: Distinguer les cas... ∎

II.3 Partie entière

Théorème II.4 ($\mathbb{R}$ est archimédien) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N} \mid x < p$.

Preuve: Soit $x > 0$, posons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

A est non vide ($0 \in A$), majoré par x dans $\mathbb{R}$, donc admet une borne sup.

Posons $s = \sup A$. Avec $\varepsilon = 1$, il existe $n \in A$ tel que $s - 1 < n$ donc $s < n + 1$. Avec $p = n + 1 \notin A$, on a $x < p$ ∎

Corollaire II.5 (Partie entière) Pour tout réel x il existe un entier relatif p unique tel que $p \leq x < p + 1$.

L'entier p est appelé la *partie entière* de x, il est noté $E(x)$ ou $[x]$. On a donc

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Preuve: ∘ <u>Soit $x > 0$</u>, posons $B = \{n \in \mathbb{N} \mid x < n\}$.

B est non vide (car $\mathbb{R}$ est archimédien), minoré par x dans $\mathbb{R}$, donc admet une borne inf.

Posons $r = \inf B$. Avec $\varepsilon = 1$, il existe $n \in B$ tel que $r \leq n < r + 1$ donc $n - 1 < r \leq n$. Avec $p = n - 1 \notin B$, on a $p = n - 1 \leq x < n = p + 1$.

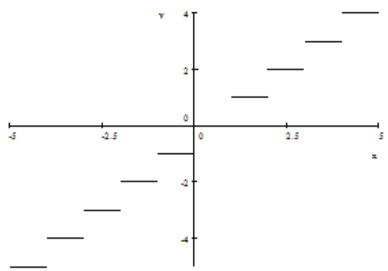
Donc p répond à la question dans ce cas.

∘ <u>Soit $x < 0$</u>, un raisonnement analogue avec $-x$ donne p tel que $p \leq -x < p + 1$, c'est à dire $-p - 1 < x \leq -p$.

Si x n'est pas entier $-p - 1$ répond à la question, si non $p = x$ convient.

Pour l'unicité, si on a $p \leq x < p + 1$ et $q \leq x < q + 1$, alors $p < q + 1$ et $q < p + 1$ ce qui implique $p \leq q$ et $q \leq p$ c'est à dire $p = q$ ∎

Remarque 5 $\{x\} = x - E(x) \in [0, 1[$ est appelé la parrtie décimale de x.



Graphe de la fonction $x \longmapsto E(x)$.

Plus généralement on a le résultat suivant.

Corollaire II.6 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \exists!(n, y) \in \mathbb{Z} \times [0, a[\mid x = na + y$.

Preuve: Avec $n = E(\frac{x}{a})$ et $y = x - na$, on a: $n \leq \frac{x}{a} < n + 1$, donc $0 \leq x - na < a$. Donc le couple (n, y) répond à la question.

L'unicité découle des propriétés de la partie entière ∎

II.4 Développements décimaux

Proposition 2 Soit n un entier positif. Tout réel x peut être encadré de manière unique sous la forme:

$$\underbrace{M+\frac{d_1}{10}+...+\frac{d_n}{10^n}}_{\substack{\text{Valeur approchée}\\ \text{par défaut}}} \leq x < \underbrace{M+\frac{d_1}{10}+...+\frac{d_n+1}{10^n}}_{\substack{\text{Valeur approchée}\\ \text{par excès}}}$$

où M est un entier et les d_i des chiffres entre 0 et 9.

Preuve: Il suffit en effet de considérer l'encadrement $E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x)+1$ donc $\frac{E(10^n x)}{10^n} \leq x < \frac{E(10^n x)}{10^n}+\frac{1}{10^n}$, il suffit ensuite d'écrire $E(10^n x)$ sous la forme $M.10^n + d_1.10^{n-1} + ... + d_n$ et ceci en utilisant le corollaire précédent avec $a = 10^n$ ∎

Exemple 3 $n = 3$ et $x = \sqrt{2}$. $\left\lfloor 10^3\sqrt{2} \right\rfloor = 1414 = 1.10^3 + 4.10^2 + 1.10^1 + 4$.

Donc la valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$ à l'ordre 3 est: 1.414.

II.5 Intervalles dans $\mathbb{R}$

Un intervalle s'écrit $|a, b|$ où $|$ remplace ici $[$ ou $]$, a peut être fini ou valoir $-\infty$, b peut être fini ou valoir $+\infty$. L'intervalle est alors l'ensemble des réels compris entre a et b, éventuellement au sens large.

On distingue alors *neuf* types d'intervalles:

$$]-\infty, b[\,,\,]-\infty, b]\,,\,]a, b[\,,\,]a, b]\,,\,[a, b[\,,\,[a, b]\,,\,]a, +\infty[\,,\,[a, +\infty[\,,\,]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

Remarque 6 Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont donc les intervalles:

$$]a, b[\,,\,]a, b]\,,\,[a, b[\,,\,[a, b] \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont dans } \overline{\mathbb{R}} \text{ tels que } a < b.$$

Proposition 3 Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$(\forall x, y \in I \mid x < y)\,,(\forall z \in \mathbb{R}) : x < z < y \Longrightarrow z \in I. \tag{II.1}$$

Preuve: D'abord tout intervalle est convexe.

Réciproquement, on pose $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et on montre que $I =]a, b[\cup \{I \cap \{a; b\}\}$ ∎

Définition 4 Une partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant (II.1) est dite convexe.

La proposition précédente exprime le fait que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème II.7 Tout intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Preuve: Il suffit de montrer que:

- Entre deux rationnels, il existe un irrationnel.

- Entre deux irrationnels, il existe un rationnel.

Soit en effet $0 \leq a < b$ dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on cherche $\frac{p}{q}$ tel que $a < \frac{p}{q} < b$, c'est à dire $aq < p < bq$,

Il suffit alors de choisir q tel que $qb - qa) > 1$ et $p = E(qx + 1)$

D'autre part si $0 \leq a < b$ dans $\mathbb{Q}$, $x = a + \frac{(b-a)\sqrt{2}}{2} \in]a, b[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ∎