Nombres réels et suites

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Table des matières

Commentaires

Ce n'est qu'une première ébauche, revisitez le site vous troiverez surememnt des mises à jour !

I Nombres réels

I.1 La structure de corps sur $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est muni de deux l.c.i $+$ et $\times$, qui vérifient les propriétés :
▷ $+$ est commutative, associative, admet 0 pour élément neutre et tout réel x est symétrisable de symétrique, son opposée, $-x$.
On dit alors que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe abélien.
▷ $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe abélien, d'élément neutre 1, et le symétrique d'un réel x non nul est son inverse $\dfrac{1}{x}$.
▷ En plus entre les lois $+$ et $\times$, on a la propriété suivante, appelée distributivité de $\times$ par rapport à $+$:
$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$: $x(y+z)=xy+xz$.

Définition 1 On résume les trois propriétés ci-dessus, en disant que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps "commutatif".

Remarque 1 La structure de corps sur $\mathbb{R}$, génère toutes les propriétés et règles de calcul connues sur $\mathbb{R}$ (simplifications, identités remarquables...).

Les notations $\sum$ et $\prod$

Dans les notations suivantes k désigne un indice entier qui peut être remplacé par toute autre lettre (différente de l'entier n).

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\times a_2\times\cdots\times a_n \ .$$

Exemple 1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n;\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{k(k+1)}{2};\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

Exemple 2 $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a = a^n;\ \prod_{k=1}^{n} k = n!;\ \prod_{k=1}^{n} 2k = 2^n n!$.

Propriétés

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{1\leq k,l\leq n}a_kb_l$ (ici $1\leq k,l\leq n$ signifie que le $\sum$ porte sur tous les couples $(k,l)\in[\![1,n]\!]^2$).
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_kb_k)=\prod_{k=1}^{n}a_k\prod_{k=1}^{n}b_k$ et donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda^n\prod_{k=1}^{n}a_k$.

Identités remarquables

Des formules que vous connaissez :

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \qquad (a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

et toutes les formules qui en résultent, on les appelles des **identités remarquables**. En général on a :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k} \ \text{ où } n\in\mathbb{N}^*,\ C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \ \text{ avec } 0!=1.$$

et aussi la formule :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n\\ i\neq j}} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j$$

Les **coefficients binômiaux** C_n^k sont liés par les relations :

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} \text{ pour } (k,n)\in\mathbb{N}^{*2}, k<n \text{ et } C_1^0 = C_1^1 = 1.$$

De ces formules on déduit les expressions suivantes :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{et} \quad a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

et plus généralement

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \text{ où } n\in\mathbb{N}^*.$$

En particulier la somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = 1+q+\cdots+q^n = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q\neq 1 \\ n+1 & \text{si } q=1 \end{cases}.$$

I.2 La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est **totalement ordonné** par la relation d'ordre naturelle $'\leq'$, définie par :

$$x\leq y \Longleftrightarrow (y-x)\in\mathbb{R}_+.$$

Cette relation d'ordre est **compatible** avec la structure de corps, dans le sens suivant :
▷ $\forall x\in\mathbb{R} : 0\leq x \Longleftrightarrow -x\leq 0$.
▷ $\forall x,y\in\mathbb{R} : (0\leq x \text{ et } 0\leq y) \Longrightarrow 0\leq x+y \text{ et } 0\leq xy$, et en général :

$$\text{Si pour tout } i\in[\![1,n]\!], a_i\leq b_i \text{ alors } \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

$$\text{Et si pour tout } i\in[\![1,n]\!], 0\leq a_i\leq b_i \text{ alors } \prod_{i=1}^{n} a_i \leq \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

▷ $\forall x,y,z\in\mathbb{R} : x+z\leq y+z \Longleftrightarrow x\leq y$.

Exercice 1 Etablir les inégalités suivantes, où a, b et c sont des réels.

1. $2ab \leq a^2+b^2$.
2. $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$.

Exercice 2 a et b étant deux réels strictement positifs, montrer qu'on a les inégalités suivantes entre moyennes harmonique, géométrique et arithmétique :

$$\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 3 Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+3}} \leq \frac{1}{2n}.$$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$

1) $\sqrt{1+x} = 1-x$. 2) $\sqrt{4-x} > x+5$. 3) $2 < |x-1| < 3$.

4) $|x-1| < |x-2|$. 5) $|x-1| < x$. 6) $(x^2-2x+1)^3 \leq 1$.

I.3 Borne supérieure et inférieure

Définition 2 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un majorant (resp minorant) de A, si

$$\forall a \in A : a \leq m \text{ (resp } m \leq a).$$

Si m est dans A, il est appelé plus grand élément (resp plus petit élément) de A ou maximum (resp minimum) de A. Il est noté $\max(A)$ (resp $\min(A)$).

Si A est majoré et minoré, on dit que A est borné.

Définition 3 Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, le plus petit des majorants de A est appelée sa *borne supérieure* et est notée $\sup A$. Ainsi on a :

$$\alpha = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : a \leq \alpha, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha. \end{cases}$$

Remarque 2 Par définition, on a :

$$\sup A = \min \{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ majorant de } A\}$$

donc si la borne supérieure existe elle est unique.

Définition 4 De la même façon, on définit la *borne inférieure* d'une partie A minorée de $\mathbb{R}$ par :

$$\beta = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : \beta \leq a, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : \beta \leq a < \beta + \varepsilon. \end{cases}$$

Et on a la même remarque concernant l'unicité et on a :

$$\inf A = \max \{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minorant de } A\}.$$

Proposition 1 Si A est majoré alors $-A = \{-a \mid a \in A\}$ est minoré, et on a :

$$\inf(-A) = -\sup(A).$$

Preuve: Utilise les définitions ▪

Remarque 3 Si $\max A$ (resp $\min A$) existe alors $\sup A = \max A$ (resp $\inf A = \min A$).

L'une des propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$ est l'existence de la borne supérieure. Il s'agit d'une propriété caractéristique dans le sens où cette propriété fait partie de la définition de $\mathbb{R}$ ou des axiomes régissant la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On admet alors le résultat suivant :

Théorème I.1 (Principe de la borne supérieure) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exemple 3 $\sup\,]a,b[= \sup\,]a,b] = b$; $\inf\, [a,b[= \inf\,]a,b[= a$. a et b sont des réels.

Corollaire I.2 Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Preuve: utlise la proposition (1) et le théorème (I.1) ▪

Remarque 4 On peut donc conclure que toute partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ admet une borne sup et une borne inf.

I.4 Droite numérique achevée

On définit $\overline{\mathbb{R}}$ en ajoutant à $\mathbb{R}$ deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$. L'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

ainsi obtenu, est appelé *droite réelle achevée.* Les éléments $-\infty$ et $+\infty$ sont non réels...

Sur le nouvel ensemble ainsi défini, on prolonge la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty.$$

On peut alors désigner le nouvel ensemble sous la forme d'intervalle : $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

L'intérêt de la droite achevée réside dans le fait que nombre de résultats dans $\mathbb{R}$ est lié au fait d'être borné ou pas. Ainsi, si A est majoré, on peut définir $s = \sup A$. Si A est non majoré, on posera $\sup A = +\infty$. $+\infty$ n'est autre que la borne supérieure de A, mais dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$. On a alors le résultat suivant, généralisant l'axiome de la borne sup.

Théorème I.3 Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne sup et une borne inf dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve: Distinguer les cas... ▪

Intervalles dans $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 5 Une partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ est un intervalle si

$$(\forall x, y \in I \mid x < y) \text{ on a } (\forall z \in \mathbb{R} : x < z < y \Longrightarrow z \in I) \tag{I.1}$$

Un intervalle s'écrit $|a, b|$ où $|$ remplace ici [ou], a peut être fini ou valoir $-\infty$, b peut être fini ou valoir $+\infty$. L'intervalle est alors l'ensemble des réels compris entre a et b, éventuellement au sens large.

On distingue alors $neuf$ types d'intervalles de $\mathbb{R}$

$$]-\infty, b[\,,]-\infty, b]\,,]a, b[\,,]a, b]\,, [a, b[\,, [a, b]\,,]a, +\infty[\,, [a, +\infty[\,,]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont donc les intervalles :

$$]a, b[\,,]a, b]\,, [a, b[\,, [a, b] \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont dans } \overline{\mathbb{R}} \text{ tels que } a < b.$$

Théorème I.4 Tout intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Preuve: Il suffit de montrer que :
- Entre deux rationnels, il existe un irrationnel.
- Entre deux irrationnels, il existe un rationnel.

Soit en effet $0 \leq a < b$ dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on cherche $\dfrac{p}{q}$ tel que $a < \dfrac{p}{q} < b$,
c'est à dire $aq < p < bq$,

Il suffit alors de choisir q tel que $qb - qa) > 1$ et $p = E(qx + 1)$

D'autre part si $0 \leq a < b$ dans $\mathbb{Q}$, $x = a + \dfrac{(b-a)\sqrt{2}}{2} \in]a, b[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ▪

I.5 Partie entière

Théorème I.5 ($\mathbb{R}$ est archimédien) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N} \mid x < p$.

Preuve: Soit $x > 0$, posons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.
A est non vide ($0 \in A$), majoré par x dans $\mathbb{R}$, donc admet une borne sup.

Posons $s = \sup A$. Avec $\varepsilon = 1$, il existe $n \in A$ tel que $s - 1 < n$ donc $s < n + 1$. Avec $p = n + 1 \notin A$, on a $x < p$ ▪

Corollaire I.6 (Partie entière) Pour tout réel x il existe un entier relatif p unique tel que $p \leq x < p + 1$.
L'entier p est appelé la *partie entière* de x, il est noté $E(x)$ ou $[x]$. On a donc

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Preuve: $\circ$ Soit $x > 0$, posons $B = \{n \in \mathbb{N} \mid x < n\}$.

B est non vide (car $\mathbb{R}$ est archimédien), minoré par x dans $\mathbb{R}$, donc admet une borne inf.

Posons $r = \inf B$. Avec $\varepsilon = 1$, il existe $n \in B$ tel que $r \leq n < r + 1$ donc $n - 1 < r \leq n$. Avec $p = n - 1 \notin B$, on a $p = n - 1 \leq x < n = p + 1$.

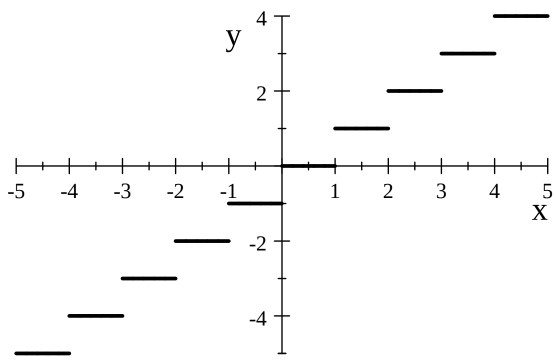
Donc p répond à la question dans ce cas.

$\circ$ Soit $x < 0$, un raisonnement analogue avec $-x$ donne p tel que $p \leq -x < p + 1$, c'est à dire $-p - 1 < x \leq -p$.

Si x n'est pas entier $-p - 1$ répond à la question, si non $p = x$ convient.

Pour l'unicité, si on a $p \leq x < p + 1$ et $q \leq x < q + 1$, alors $p < q + 1$ et $q < p + 1$ ce qui implique $p \leq q$ et $q \leq p$ c'est à dire $p = q$ ▪

Remarque 5 $\{x\} = x - E(x) \in [0, 1[$ est appelé la parrtie décimale de x.



Graphe de la fonction $x \longmapsto E(x)$.

Plus généralement on a le résultat suivant.

Corollaire I.7 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \exists!(n, y) \in \mathbb{Z} \times [0, a[\mid x = na + y$.

Preuve: Avec $n = E(\frac{x}{a})$ et $y = x - na$, on a : $n \leq \frac{x}{a} < n + 1$, donc $0 \leq x - na < a$. Donc le couple (n, y) répond à la question.

L'unicité découle des propriétés de la partie entière ▪

I.6 Valeur absolue

Définition 6 Pour réel x le réel positif

$$|x| = \max\{-x; x\} = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leq x \\ -x \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

est appelé la valeur absolue de x.

Remarque 6 Par définition, on a : $\left[\begin{array}{l} x \leq |x|. \\ -x \leq |x|. \\ |x| = |-x|. \end{array}\right.$

Exemple 4 $|0| = 0; |-1| = |1| = 0.$

Propriétés

1. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = 0 \iff x = 0$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x|\,|y|$, si en plus $y \neq 0$, on a $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire) et on en déduit que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

I.7 Norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^d$

Définition 7 Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), on appelle euclidienne de $x = (x_1, ..., x_d)$ qu'on $\|x\|$ ou $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = (x_1^2 + ... + x_d^2)^{1/2}$.

Et on appelle distance euclidienne entre deux points $x = (x_1, ..., x_d)$ et $y = (y_1, ..., y_d)$ de $\mathbb{R}^d$ le réel

$$d(x, y) = |y - x|$$

On a alors les propriétés suivantes déjà prouvées en première période :
- Inégalité de Cauchy-Schwarz :
- inégalité triangulaire :

Définition 8 Boule ;
partie bornée de $\mathbb{R}^d$,
application bornée à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

II Limite d'une suite

II.1 Généralités

– *Notion de suite,*

Définition 9 (à partir un certain rang) On dit qu'une propriété $P(n)$ est vérifiée *à partir un certain rang* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p : P(n)$ est vrai.

– *Limite d'une suite réelle dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *; convergence d'une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *; cas particulier des suites complexes.*

Définition 10 étant donné un nombre réel a, on dit que (u_n) admet a pour limite si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : |u_n - a| \leq \varepsilon \tag{II.1}$$

lorsqu'un tel nombre a existe, on dit que la suite (u_n) est *convergente,* ou quelle admet une limite finie. On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.

S'il n'existe aucun réel a vérifiant (II.1), on dit que la suite (u_n) est *divergente.*

Théorème II.1 (unicité de la limite) Si une suite est convergente sa limite est unique.

Preuve: Par absurde, si $a < a'$ vérifient tous les deux (II.1), alors avec $\varepsilon = \dfrac{a' - a}{3}$, on aboutit à une contradiction ∎

Proposition 2 $\lim u_n = a \Longleftrightarrow \lim(u_n - a) = 0$

Preuve: C'est la définition ∎

Exemple 5 Toute suite constante à partir d'un certain rang est convergente.
$u_n = \dfrac{1}{n}$. $\lim u_n = 0$.
$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. $\lim u_n = 0$
$u_n = n$. (u_n) n'est pas convergente.
$u_n = (-1)^n$. (u_n) n'est pas convergente.

On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que
- $\lim u_n = +\infty$ ou que (u_n) diverge vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : u_n \geq A.$$

- $\lim u_n = -\infty$ ou que (u_n) diverge vers $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : u_n \leq A.$$

Remarque 7 (unicité) Le résultat d'unicité de la limite se prolonge aussi au cas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 6 $u_n = n$. (u_n) converge vers $+\infty$.
$u_n = \sqrt{n}$. (u_n) converge vers $+\infty$.

Remarque 8 Une suite qui n'est pas convergente peut ne pas admettre de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$
Exemple : $u_n = (-1)^n$.

II.2 Limite d'une suite à termes dans $\mathbb{R}^d$

Définition 11 Soit $\ell \in \mathbb{R}^d$, et $(z_n) \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{\mathbb{N}}$. On dit que $\lim z_n = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow \|z_n - \ell\| < \varepsilon$$

– La convergence d'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ équivaut à la convergence de chacune de ses composantes (dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$).

Remarque 9

1. L'unicité de la limite.
2. $\lim z_n = \ell \Longleftrightarrow \lim |z_n - \ell| = 0$.
3. $\lim z_n = 0 \Longleftrightarrow \lim |z_n| = 0$.
4. Si limite $z_n = \ell$ alors $\lim |z_n| = |\ell|$.

Remarque 10 Toutes les propriétés démontrées sur les suites réelles ne faisant pas intervenir d'inégalités sont encore valables pour les suites complexes (les démonstrations n'utilisent que l'inégalité triangulaire). En particulier, on a les théorèmes généraux sur les sommes, produits, quotients, l'unicité de la limite, une suite convergente est bornée. On ne dispose plus par contre du passage à la limite dans les inégalités, du théorème de la limite monotone, ni du théorème des gendarmes. Le théorème suivant permet de montrer qu'une suite de complexes converge vers une limite.

Théorème II.2 Soit (z_n) une suite de complexes et $a \in \mathbb{C}$. Si (α_n) est une suite de réels vérifiant
- $|z_n - a| \leq \alpha_n$ à partir d'un certain rang,
- $\alpha_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$,

alors $z_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} a$.

Théorème II.3 Soit $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell = \ell_1 + i\ell_2$, alors

$$\lim z_n = \ell \Longleftrightarrow (\lim x_n = \ell_1 \text{ et } \lim y_n = \ell_2)$$

Remarque 11 Ceci nous permet de se ramener a l'étude de deux suites réelles au lieux d'une complexe.

Exemple 7

1. Suite géometrique $q \in \mathbb{C}$, $z_n = q^n$:
   - Si $|q| < 1$ alors $\lim z_n = 0$.
   - Si $|q| > 1$ alors $\lim |z_n| = +\infty$.
   - Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, on pose $q = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $\theta \neq 0$, on a donc $q^n = e^{in\theta}$

Exercice 5 Montrer que dans ce cas (q^n) n'admet pas de limite.

Remarque 12 Si $\mathrm{Re}\,(z_n)$ (ou $\mathrm{Im}\,(z_n)$) n'est pas convergente alors la suite (z_n) ne l'est pas aussi.

Exemple 8 Considérons la suite $z_n = \dfrac{n^2 + i\left(n^2+1\right)}{2n^2+5n+1} = \dfrac{n^2}{2n^2+5n+1} + i\dfrac{n^2+1}{2n^2+5n+1}$.

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2n^2+5n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2+5n+1} = \dfrac{1}{2}$,
Donc $\lim z_n = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

Remarque 13 Les opérations sur les limites des suites convergentes sont les mêmes que dans le cas des suites réelles.

II.3 Propriétés des suites convergentes

Théorème II.4 Toute suite convergente est bornée.

Preuve: Avec $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite , il existe N tel que $\forall n \geq N : |u_n - a| \leq 1$. Donc (u_n) est majorée par $\max\{u_0; u_1; ...; u_{N-1}; |a|+1\}$ ▪

Remarque 14 Si $\lim u_n = +\infty$ alors (u_n) n'est pas majorée. Par contre si (u_n) n'est pas majorée on ne peut pas conclure que $\lim u_n = +\infty$.

Théorème II.5 Si $\lim u_n = a > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
De même si $\lim u_n = a < 0$, alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.
Plus généralement, si (u_n) converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$, alors pour tous réels x, y tels que $x < l < y$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow x \leq u_n \leq y.$$

Preuve: Si $a > 0$, avec $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : u_n \geq a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2} > 0$ ▪

Remarque 15 Si $\lim u_n = 0$ on peut rien dire sur le signe de u_n.
Exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 6 Ecrire à l'aide des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. (u_n) ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$.
2. (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$.
3. (u_n) diverge.

II.4 Opérations sur les suites convergentes

– *Opérations algébriques sur les limites. Composition de limites.*

Théorème II.6 Soient (u_n) et (v_n) convergentes telles que $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$.
(i) $(u_n) + (v_n)$ est convergente et $\lim(u_n + v_n) = a + b$.
(ii) $(u_n)(v_n)$ est convergente et $\lim(u_n v_n) = ab$.
(iii) Si en plus $b \neq 0$, alors $\dfrac{u_n}{v_n}$ est définie à.p.c.r et on a $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$.

Preuve: utiliser la définition ▪

Théorème II.7 Si (u_n) bornée et $\lim v_n = 0$, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Preuve: Si $|u_n| \leq A \neq 0$ pour tout n. Pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $|v_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{A}$, pour tout $n \geq N$. Et donc $|u_n v_n| \leq \varepsilon$, pour tout $n \geq N$. cqfd ▪

Exemple 9 $u_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{n}$.

Lien avec les limites de fonctions

– Limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I ; cas particulier des fonctions réelles ou complexes. Caractérisation séquentielle des limites.

Théorème II.8 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \in \bar{I}; l \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit (u_n) une suite à termes dans I. Si $\lim u_n = a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim f(u_n) = l$.

Remarque 16 Ce théorème est utile pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en a. Il suffit pour cela d'exhiber deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a mais telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ne convergent pas vers la même limite.

Remarque 17 On utilise également ce théorème dans l' étude des suites récurrentes

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, et si la fonction f est continue au point l, alors la limite de la suite récurrente est un point fixe de la fonction :

$$l = f(l)$$

Exemple 10 Montrez que la fonction définie par $f(x) = sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite lorsque $x \longrightarrow 0^+$.

Exercice 7 Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique. Montrez que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe et est finie, alors la fonction f est constante.

Théorème II.9 Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. La fonction f est continue au point a si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Cas de limites infinies

On résume les propriétés dans le tableau suivant.

$\lim u_n$	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$a > 0$	0
$\lim v_n$	$a > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\pm\infty$	$+\infty$	?	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u_n.v_n)$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	?
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\pm\infty$	?	?	0	0

Exemple 11
1. Limite de suite géométrique
2. Limite de série géométrique
3. Limite de suite arithmétique
4. Limite de suite polynômiale et rationnelle

II.5 Propriétés avec la relation d'ordre

Théorème II.10 Soient (u_n) et (v_n) convergentes telles que $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$.
Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors $a \leq b$.

Remarque 18 Même si on a $u_n < v_n$, on ne peut conclure que $a < b$.
Exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{2n}$.

Corollaire II.11 Soient une suite (u_n), un réel l. S'il existe une suite (α_n) telle que :

(i) $\lim \alpha_n = 0$,
(ii) $|u_n - l| \leq \alpha_n$ à partir d'un certain rang.

Alors (u_n) converge vers l.

Preuve: Pour $\varepsilon > 0$, on considère N tel que $|u_n - l| \leq \alpha_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ ▪

Théorème II.12 On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que
(i) $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang,
(ii) Les deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et $\lim v_n = \lim w_n$.
Alors la suite (u_n) est convergente et $\lim u_n = \lim v_n = \lim w_n$.
De même, si
(i') $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang,
(ii') $\lim v_n = +\infty$.
Alors $\lim u_n = +\infty$.

Preuve: Pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $l - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$ ▪

II.6 Théorèmes d'existence

– *Condition de Cauchy, critère général de convergence de Cauchy.*

Suites extraites

Définition 12 Etant donné deux suites (u_n) et (v_n). On dit que (v_n) est une sous suite (ou suite extraite) de (u_n), s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemple 12 (u_{n+1}) et (u_{2n}) sont extraites de (u_n).

Théorème II.13 Si (u_n) est convergente de limite l, alors toute sous suite de (u_n) est convergente de même limite l.

Remarque 19 La réciproque est fausse...
Exemple : $u_n = (-1)^n$, $u_{2n} = 1$ donc (u_{2n}) convergente alors que (u_n) diverge.

Remarque 20 Pour montrer qu'une suite diverge, on peut donner deux sous suites qui convergent vers deux limites différentes. Par contre on a le résultat particulier suivant.

Théorème II.14 Si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l, alors (u_n) est convergente et $\lim u_n = l$.

Preuve: Pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n \geq N : |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$,
Donc $\forall n \geq 2N + 1 : |u_n - l| \leq \varepsilon$, donc $\lim u_n = l$ ▪

Cas de suites monotones

– *Convergence des suites ou fonctions réelles monotones.*

Définition 13 $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite *croissante* (resp. strictement croissante) si

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1} \text{ (resp. } u_n < u_{n+1}.$$

(u_n) est dite *décroissante* (resp. strictement décroissante) si

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq u_{n+1} \text{ (resp. } u_n > u_{n+1}.$$

Si (u_n) est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est *monotonne.*

Exemple 13 $u_n = n$ est strictement croissante.
$u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est strictement décroissante.
$u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

Propriétés

1. La somme de deux suites croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissantes).
2. Si $\lambda > 0$ et (u_n) croissante alors $\lambda.(u_n)$ est croissante.
3. Si (u_n) croissante alors $(-u_n)$ est décroissante.

Théorème II.15

1. Si (u_n) est croissante majorée, alors elle est convergente et on a
$$\lim u_n = \sup_n u_n.$$
2. De même si (u_n) est décroissante minorée, alors elle est convergente et on a
$$\lim u_n = \inf_n u_n.$$
3. Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
4. Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Preuve: Utiliser la caractérisation de la borne sup (resp inf) et la monotonie ▪

Exemple 14

1. $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$. (ind : $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$).
2. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, (u_n) n'est pas majorée. (ind : $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$).

Suites adjacentes

– Suites réelles adjacentes ; principe des segments emboîtés.

Définition 14 Deux suites (a_n) et (b_n) sont dites *adjacentes* si
(i) (a_n) et (b_n) sont monotones de sens contraire.
(ii) La suite $(a_n - b_n)$ converge vers 0.

Exemple 15

1. $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}$; $b_n = a_n + \frac{1}{n.n!}$.
2. Soient a, b tels que $0 < a < b$. On définit (u_n) et (v_n) par
$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = b, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n). \end{cases}$$
(Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$).

Théorème II.16 Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Preuve: On suppose $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$ et $(b_n - a_n) \longrightarrow 0$. On montre que
$$\forall n, p \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n.$$
En effet, si on suppose par absurde qu'il existe (n_0, p_0) tel que $a_{n_0} > b_{p_0}$, alors puisque
$$\forall n \geq n_0, p \geq p_0 \in \mathbb{N} : b_p \leq b_{p_0} < a_{n_0} \leq a_n.$$
Donc
$$\forall n \geq \max(n_0, p_0) \in \mathbb{N} : a_n - b_n \geq a_{n_0} - b_{p_0} > 0$$
ce qui contredit le fait que $\lim(a_n - b_n) = 0$.

On conclut donc que (a_n) est majorée et (b_n) est minorée, elles sont donc convergentes et ont la même limite. cqfd ▪

Exemple 16

1. Dans l'exemple 1 ci-dessus $\lim a_n = \lim b_n = e$.
2. Dans l'exemple 2 ci-dessus $\lim u_n = \lim v_n = \mu(a,b)$ appelé moyenne arithmético-géométrique de a et b.

II.6.1 Segments emboités

Définition 15 Une suite (I_n) de segments de $\mathbb{R}$ est dite *emboités* si $\forall n : I_{n+1} \subset I_n$.

Remarque 21 Si on pose $I_n = [a_n, b_n]$, alors $(a_n) \nearrow$ et $(b_n) \searrow$.

Théorème II.17 Si (I_n) est une suite de segments emboités alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.
En plus si la suite des longueurs $(\text{mes}(I_n))$ converge vers 0, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Preuve: Si en pose $I_n = [a_n, b_n]$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a,b]$, où $a = \lim a_n$ et $b = \lim b_n$ ▪

II.6.2 Méthode de dichotomie

On suppose qu'il existe une solution unique $\alpha \in [a,b]$ de l'équation $f(x) = 0$, et que $f(x) < 0$ sur $[a,\alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha, b]$.

La méthode de dichotomie consiste à construire les deux suites

$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = b \text{ et pour tout } n : \\ \begin{array}{l} v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ u_{n+1} = u_n \end{array} \quad \text{si } f(u_n)f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) < 0, \\ \begin{array}{l} v_{n+1} = v_n \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \end{array} \quad \text{si } f(u_n)f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

si $f(u_n)f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) = 0$ alors la solution est $\dfrac{u_n+v_n}{2}$, et l'algorithme s'arrête (ie. les deux suites sont stationnaires à partir d'un certain rang).

Proposition 3 Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. La limite commune des deux suites est la racine α de l'équation $f(x) = 0$.

Preuve: On a $u_{n+1} - u_n = 0$ ou $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$. Pour étudier la monotonie de (u_n) et (v_n), il suffit d'étudier le signe de $(v_n - u_n)$.

On a $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$, donc $sgn(v_n - u_n) = sgn(b-a) > 0$.

On conclut donc que $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$ et $\forall n : u_n \leq v_n$. En plus la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes. notons $l = \lim u_n = \lim v_n$. on a $\forall n : u_n \leq l \leq v_n$, si on suppose, par absurde, que $l < \alpha$, alors il existe n tel que $u_n \leq l \leq v_n < \alpha$, donc $f(u_n)f(v_n) > 0$ ce qui contrdit la définition des deux suites ▪

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème II.18 De toute *suite bornée* de nombres réels, on peut extraire une sous suite qui converge.

Preuve: On note $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des valeurs de la suite. Et on pose $a = \inf U$, $b = \sup U$. on a donc $\forall n : a \leq u_n \leq b$.

1^{er} cas : U fini alors $\exists n_0$ tel que $I = \{n \mid u_n = u_{n_0}\}$ soit infini, on considère alors $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ strictement croissante, la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est stationnaire donc converge.

2$^{\text{ème}}$ cas : U infini, on construit alors deux suites (a_n) et (b_n) en posant

$$\begin{cases} a_0 = a, b_0 = b \text{ et pour tout } n : & \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{si } \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right] \cap U \text{ infini,} \\ a_{n+1} = a_n & \\ b_{n+1} = b_n & \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{si non. Dans ce cas } \left[\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] \cap U \text{ infini.} \end{cases}$$

On a alors $\forall n : [a_n, b_n] \cap U$ infini. Et les deux suites sont adjacentes, notons l leur limite commune.

On construit enfin $(u_{\varphi(n)})$ par

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \varphi(n) > \varphi(n-1) \text{ tel que } u_{\varphi(n)} \in I_n \cap U \end{cases}$$

la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers l. ▪

III Calculs asymptotiques

– *Relations de comparaisons, notations de Landau. Développements limités.*
– *Sommation et intégration des relations de comparaison.*
– *Comparaison des suites usuelles.*
– *Exemples de calculs asymptotiques. Formule de Stirling.*

III.1 Domination

Définition 16 On dit qu'une suite (u_n) est *dominée* par une suite (v_n), s'il existe $\lambda > 0$ tel que $|u_n| \leq \lambda |v_n|$ à partir d'un certain rang.
On onte alors $u_n = O(v_n)$ (on lit u_n égale grand o de v_n).

Remarque 22 Si (v_n) ne s'annule pas, on a : $u_n = O(v_n) \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ bornée.

Exemple 17

1. $u_n = O(1)$ signifie que (u_n) est bornée.
2. $u_n = O(\lambda u_n)$, pour tout $\lambda \neq 0$.
3. Si $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ existe alors $u_n = O(v_n)$
4. $u_n = 2n; v_n = 5n + 1.\ u_n = O(v_n)$.

Propriétés

1. $\begin{array}{l} u_n = O(v_n) \\ v_n = O(w_n) \end{array} \Longrightarrow u_n = O(w_n)$.
2. $\begin{array}{l} u_n = O(w_n) \\ v_n = O(w_n) \end{array} \Longrightarrow u_n + v_n = O(w_n)$. et $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda u_n = O(w_n)$.
3. $\begin{array}{l} x_n = O(u_n) \\ y_n = O(v_n) \end{array} \Longrightarrow x_n y_n = O(u_n v_n)$.
4. $\begin{array}{l} u_n = O(v_n) \\ \lim v_n = 0 \end{array} \Longrightarrow \lim u_n = 0$.

Exercice 8 Si $u_n > 0$ et $v_n > 0$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \Longrightarrow u_n = O(v_n)$.

III.2 Prépondérance

Définition 17 On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) s'il existe une suite (ε_n) telle que

$$u_n = \varepsilon_n v_n \text{ et } \lim \varepsilon_n = 0.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$, on lit *"petit o"*.

Remarque 23

1. Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors
$$u_n = o(v_n) \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 0.$$
2. Si (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas (à partir d'un certain rang) alors
$$u_n = o(v_n) \iff \frac{1}{v_n} = o\left(\frac{1}{u_n}\right).$$
3. $u_n = o(v_n) \Longrightarrow u_n = O(v_n)$.
4. $u_n = o(1)$ signifie que $\lim u_n = 0$.

Propriétés

1. $\begin{array}{l} u_n = O(v_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array} \Longrightarrow u_n = o(w_n)$. et $\begin{array}{l} u_n = o(v_n), \\ v_n = O(w_n) \end{array} \Longrightarrow u_n = o(w_n)$.
2. $\begin{array}{l} u_n = o(w_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array} \Longrightarrow u_n + v_n = o(w_n)$. et $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda u_n = o(w_n)$.
3. $\begin{array}{l} x_n = o(u_n) \\ y_n = O(v_n) \end{array} \Longrightarrow x_n y_n = o(u_n v_n)$.

Exemple 18

1. $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$; $\dfrac{1}{n \ln n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. Suites de référence : $n^n; n!; a^n; n^\alpha; (\ln n)^\beta$, $a > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (a) $n! = o(n^n)$.
   (b) $a^n = o(n!)$.
   (c) $n^\alpha = o(a^n)$ si $a > 1$. Exercice : Etudier le cas $0 < a < 1$.
   (d) $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$ si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Preuve: (a) On pose $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$ et on étudie $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. On a $\lim \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{e} < 1$, donc $\lim v_n = 0$.
(b) et (c) même démo.
(d) $\dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha} \dfrac{\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ ∎

III.3 Équivalence

Définition 18 Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *équivalentes* s'il existe une suite (a_n), telle que

$$u_n = a_n v_n \text{ et } \lim a_n = 1.$$

On note alors $u_n \sim v_n$.

Remarque 24

1. Si $\lim a_n = 1$ alors $\lim \dfrac{1}{a_n} = 1$ et $v_n = \dfrac{1}{a_n} u_n$. L'équivalence est donc symétrique.
2. Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors
$$u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1.$$
3. Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors
$$u_n \sim v_n \iff \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}.$$
4. Si $a_n \longrightarrow 1$ alors $\varepsilon_n = a_n - 1 \longrightarrow 0$, donc
$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff v_n - u_n = o(u_n).$$

Exemple 19

1. Si $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$ alors $u_n \sim l$.
2. $\dfrac{2n+1}{3n^2+2} \sim \dfrac{2}{3n}$...

Propriétés

1. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang. De plus si $\lim u_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim v_n = l$.
3. $\begin{matrix} x_n \sim u_n \\ y_n \sim v_n \end{matrix} \Longrightarrow x_n y_n \sim u_n v_n$.

Exercice 9

1. Si (u_n) et (v_n) sont à termes > 0, alors
$$u_n \sim v_n \iff u_n^{\alpha} \sim v_n^{\alpha}, \text{ pour tout } \alpha \neq 0.$$
2. $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff (u_n - v_n) \longrightarrow 0$.
3. Si (u_n) et (v_n) sont à termes > 0, alors
$$u_n \sim v_n \text{ et } \lim v_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{1\} \iff \ln u_n \sim \ln v_n.$$

III.4 Cas de suites complexes

On étend les définitions relatives de comparaisons aux suites complexes. Si $(u_n)\ (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

- on dit que $u_n = O(v_n)$ si $\dfrac{u_n}{v_n}$ bornée ; ie $u_n = b_n v_n$ avec (λ_n) bornée.
- on dit que $u_n = o(v_n)$ si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$; ie $u_n = b_n v_n$ avec $b_n \longrightarrow 0$.
- on dit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} v_n$ si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. ie $u_n = w_n v_n$ avec $w_n \longrightarrow 1$.

Remarque 25 $\lim z_n = \ell \in \mathbb{R} \not\Rightarrow (z_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. exemple : $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{i}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$...

Etude de suites récurrentes

On étudie la suite

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n). \end{cases}$$

Avec $f(x) = \ln(1 + 2x)$ et $f'(x) = \dfrac{2}{1 + 2x}$, on a $|f'x)| \leq \dfrac{2}{3}, \forall x \geq 1$, donc on a

$$\begin{array}{rcl} |u_{n+1} - \ell| & \leq & \dfrac{2}{3}\,|u_n - \ell| \\ & \leq & \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 |u_{n-1} - \ell| \\ & & \vdots \\ & \leq & \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} |u_0 - \ell|\,. \end{array}$$

Où ℓ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.