

Programme de la classe de première année MPSI

I - Introduction à l'analyse

Objectifs

L'objectif de cette partie est

- d'amener les étudiants vers des problèmes effectifs d'analyse élémentaire,
- d'introduire les premiers outils nécessaires à l'étude de la physique.

On focalise l'attention sur les applications du calcul infinitésimal à une variable, en évitant de soulever des questions théoriques liées à la topologie de la droite réelle. On s'appuie autant que possible sur les connaissances acquises dans le secondaire.

Il est attendu qu'à l'issue de cette partie, les étudiants

- aient une bonne connaissance des fonctions usuelles et soient en particulier capables de se représenter leur graphe, de définir les fonctions trigonométriques réciproques, de manipuler les formules d'addition, d'écrire les développements limités usuels, etc. ;
- sachent établir des propriétés simples relatives aux limites ;
- maîtrisent la pratique des développements limités et leurs applications au calcul des limites, à l'étude locale des fonctions et des courbes, etc. ;
- puissent mener l'étude d'une courbe paramétrée (y compris en coordonnées polaires) ;
- aient fait le lien entre l'étude métrique des courbes et la cinématique dans le plan ;
- sachent résoudre des équations différentielles linéaires du premier ordre et du second ordre à coefficients constants.

Contenu

1. Notions mathématiques de base

- Ensemble, élément d'un ensemble, relation d'appartenance ; partie d'un ensemble, relation d'inclusion ; réunion, intersection, différence, complémentaire.
- Eléments de logiques, raisonnements mathématiques.
- Relation d'équivalence. Relation d'ordre. Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément. Principe de récurrence. Raisonnements par récurrence.
- Application, fonction ; produit (cartésien), graphe d'une application ; image, antécédent d'un élément ; image directe, réciproque d'une partie ; restriction, prolongement, application induite.
- Injection ; surjection ; bijection, application réciproque.

2. Ordre naturel dans \mathbb{R}

- Relation d'ordre sur \mathbb{R} ; propriété d'Archimède ; majorant/minorant, plus grand / petit élément, borne supérieure / inférieure d'une partie de \mathbb{R} ; principe de la borne supérieure.
- Définition de $\overline{\mathbb{R}}$. Intervalles de \mathbb{R} et de $\overline{\mathbb{R}}$, segments.
- Valeur absolue ; norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^d ; inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire. Boule ; partie bornée de \mathbb{R}^d .

3. Limites et continuité

- Limite en un point d'une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle de \mathbb{R} ; limite en $\pm\infty$; limite infinie d'une fonction à valeurs réelles. Limite à gauche / à droite en un point. Opérations sur les limites.
- Continuité en un point, sur un intervalle : définition.

Convergence dans \mathbb{R}^d

- Notion de suite, de suite extraite. Vocabulaire sur les fonctions.
- Limite d'une suite réelle dans \mathbb{R} ; convergence d'une suite à valeurs dans \mathbb{R}^d ; cas particulier des suites complexes.

- Limite d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^d définie sur un intervalle I de \mathbb{R} en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I ; cas particulier des fonctions réelles ou complexes. Caractérisation séquentielle des limites.
- Fonction continue, continue à gauche / à droite en un point; fonction continue sur un intervalle; fonction continue par morceaux sur un segment.
- Opérations algébriques sur les limites. Composition de limites. \mathbb{C} -algèbre $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues à valeurs complexes définies sur un intervalle I de \mathbb{R} .
- La convergence d'une suite ou d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^d équivaut à la convergence de chacune de ses composantes (dans la base canonique de \mathbb{R}^d).
- Convergence des suites ou fonctions réelles monotones.
- Suites réelles adjacentes; principe des segments emboîtés. Condition de Cauchy, critère général de convergence de Cauchy.
- Comparaison des suites et fonctions usuelles.

Propriétés globales des fonctions continues

- Théorème des valeurs intermédiaires.
- Caractérisation des homéomorphismes d'un intervalle sur un intervalle.
- application bornée à valeurs dans \mathbb{R}^d , Toute fonction à valeurs dans \mathbb{R}^d définie et continue sur un segment est bornée; si de plus elle est à valeurs réelles ($d = 1$), elle atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure.

4. Dérivées et primitives

- Dérivabilité en un point, dérivabilité à droite, à gauche, nombre dérivé, tangente, fonction dérivée. Combinaison linéaire, produit, quotient, composée de fonctions dérivables en un point.
- Fonctions dérivables, de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle. Fonctions n fois dérivables, de classe \mathcal{C}^n , de classe \mathcal{C}^∞ . Caractérisation d'un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme.
- Intégrale d'une fonction continue sur un segment; propriétés et interprétation géométrique. Inégalité de la moyenne.
- Intégration par parties; formule de changement de variables.
- Dérivabilité et dérivées des fonctions usuelles.
- Théorème de Rolle, formule des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles. Inégalité des accroissements finis. Théorème de prolongement de la dérivée. Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Caractérisation des fonctions à valeurs réelles lisses croissantes ou décroissantes, convexes ou concaves. Caractérisation des difféomorphismes d'intervalles.
- Fonctions à valeurs réelles convexes de classe \mathcal{C}^2 ; caractérisation des fonctions à valeurs réelles lisses convexes ou concaves, inégalité de convexité; inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young, inégalité arithmético-géométrique.
- Résolution numérique d'une équation par la méthode de Newton, convergence quadratique.

5. Fonctions usuelles

- Fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
- Exponentielle réelle, logarithme népérien; fonctions $x \mapsto a^x$, logarithmes de base a ($a > 0$); fonctions puissances $x \mapsto x^p$ ($p \in \mathbb{R}$).
- Fonctions trigonométriques circulaires, fonctions arctan, arcsin, arccos.
- Fonctions trigonométriques hyperboliques, fonctions arctanh, arcsinh, arccosh.
- Fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$; exponentielle complexe.

6. Développements limités

- Notion de développement limité, unicité.
- Formule de Taylor-Young. Développements limités usuels.
- Exemples de calculs de développements limités.

7. Courbes paramétrées planes

- Courbe paramétrée (ou chemin) de classe \mathcal{C}^∞ dans \mathbb{R}^2 ; image d'une courbe paramétrée. Changement de paramétrage, chemins équivalents.
- Point régulier, tangente.
- Étude locale: allure d'une courbe paramétrée en un point régulier ou singulier, branches infinies.
- Propriétés métriques: longueur d'un chemin fini, abscisse curviligne, courbe à paramétrage normal, courbure algébrique, repère et formules de Frenet, rayon de courbure et cercle osculateur en un point birégulier.

- Étude des courbes paramétrées en coordonnées polaires.
- Interprétation cinématique : trajectoire d'un point mobile dans le plan, vitesse, accélération.

8. Équations différentielles

- Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.
- Équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants (dans \mathbb{C}) : équation caractéristique, système fondamental de solutions de l'équation homogène associée, méthode de Lagrange (de la variation des constantes), cas où le second membre est une fonction polynôme-exponentielle, problème de Cauchy.
- Équations différentielles à variables séparées.

II - Introduction à la géométrie

Objectifs

On étudie dans cette partie les systèmes d'équations linéaires à coefficients réels ; les notions fondamentales de l'algèbre linéaire sont introduites d'un point de vue constructif, sur la base de l'algorithme de Gauss. On y aborde d'autre part la géométrie euclidienne en petite dimension, en particulier pour les besoins de la physique et des sciences industrielles, en mettant en avant l'utilisation des nombres complexes et le formalisme de l'algèbre linéaire.

Il est attendu qu'à l'issue de cette partie, les étudiants

- *soient capable, au moyen de l'algorithme de Gauss, de résoudre un système d'équations linéaires, de déterminer un rang, d'extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs, de compléter une famille libre en une base, d'inverser une matrice carrée ;*
- *aient compris le théorème du rang ;*
- *sachent manipuler les nombres complexes et les utiliser pour résoudre des problèmes de géométrie plane ;*
- *connaissent les déterminants d'ordre 2 ou 3 et leur interprétation géométrique ;*
- *sachent orthogonaliser une famille libre de \mathbb{R}^d au moyen de l'algorithme de Gram-Schmidt et calculer la distance entre deux sous-espaces affines en petite dimension ;*
- *sachent utiliser les coordonnées polaires dans \mathbb{R}^2 et les coordonnées cylindriques et sphériques dans \mathbb{R}^3 ;*
- *connaissent les formules usuelles relatives au produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 ;*
- *connaissent les coniques et leur intervention dans la description du mouvement à accélération centrale.*

Contenu

1. Sous-espaces vectoriels et affines de \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^*$)

- Résolution d'un système de n équations linéaires à coefficients réels à p inconnues par la méthode d'élimination de Gauss (algorithme de Gauss) ; inconnues principales, secondaires.
- Matrice à coefficients réels à n lignes et p colonnes ; multiplication des matrices, propriété d'associativité. Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires. Matrice échelonnée, pivots. Matrice carrée inversible, inversion d'une matrice carrée par l'algorithme de Gauss-Jordan.
- Addition et multiplication par un scalaire dans \mathbb{R}^d , combinaison linéaire d'une famille finie d'éléments de \mathbb{R}^d . Famille finie libre, liée. Si (u_1, \dots, u_n) et (v_1, \dots, v_p) sont des familles d'éléments de \mathbb{R}^d telles v_1, \dots, v_p s'expriment comme combinaisons linéaires de (u_1, \dots, u_n) et si p est strictement supérieur à n , alors la famille (v_1, \dots, v_p) est liée.
- Sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d . Sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d engendré par une famille finie d'éléments de \mathbb{R}^d , famille génératrice d'un sous-espace vectoriel. Base d'un sous-espace vectoriel ; tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d admet une base ; toutes les bases d'un sous-espace vectoriel donné comportent le même nombre de vecteurs ; dimension d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d . Si une famille (u_1, \dots, u_n) d'un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^d est libre (resp. génératrice), alors $n \leq \dim F$ (resp. $n \geq \dim F$) ; si $n = \dim F$, alors la famille (u_1, \dots, u_n) est une base de F si et seulement si elle est libre ou génératrice ; coordonnées d'un vecteur de F dans une base de F .

- Rang d’une famille de vecteurs de \mathbb{R}^d , d’une matrice, d’un système d’équations linéaires homogènes. Théorème du rang : le rang d’un système d’équations linéaires homogènes est égal au rang de sa matrice, une matrice et sa transposée ont même rang, l’ensemble des solutions d’un système d’équations linéaires homogènes à p inconnues de rang r est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p de codimension r (c’est-à-dire de dimension $p - r$).
- Utilisation de l’algorithme de Gauss pour extraire une famille libre maximale d’une famille finie d’éléments de \mathbb{R}^d , pour compléter une famille libre d’un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^d en une base de F .
- Sous-espace affine de \mathbb{R}^d ; direction d’un sous-espace affine. Obtention des équations paramétriques (resp. cartésiennes) d’un sous-espace affine de \mathbb{R}^d donné par un système d’équations cartésiennes (resp. paramétriques).

2. Nombres complexes

- Plan de Gauss. Parties réelle et imaginaire, conjugué, module d’un nombre complexe.
- Résolution algébrique d’une équation du deuxième degré.
- Groupe multiplicatif \mathbb{U} des nombres complexes de module égal à 1. Arguments d’un nombre complexe; argument principal; expression trigonométrique d’un nombre complexe. Formules d’addition, formule de Moivre, formules de duplication, paramétrage rationnel de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Racines de l’unité; racines n -ièmes d’un nombre complexe pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Étude des similitudes affines réelles de \mathbb{C} , de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

3. Déterminants d’ordre 2 ou 3

- Déterminant d’une famille de vecteurs dans la base canonique en dimension 2 ou 3; orientation canonique de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ; base directe, indirecte.
- Déterminant d’une matrice; multiplicativité du déterminant.
- Formules de Cramer pour des systèmes de 2 ou 3 équations.

4. Structure euclidienne canonique de \mathbb{R}^d

- Produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^*$). Relation d’orthogonalité. Inégalité de Cauchy-Schwarz; norme euclidienne canonique; théorème de Pythagore; identités de polarisation; identité du parallélogramme.
- Famille orthogonale de vecteurs; toute famille orthogonale dont tous les éléments sont non nuls est libre. Orthogonal F^\perp d’un sous-espace vectoriel F ; la dimension de F est égale à la codimension de F^\perp . Orthogonalisation d’une famille libre : algorithme de Gram-Schmidt. Bases orthonormales.
- Déterminant (noté Det) d’une famille de vecteurs dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 calculé dans une base orthonormale. Matrice et déterminant de Gram d’une famille de 2 ou 3 vecteurs. Interprétation géométrique du déterminant de Gram; aire d’un parallélogramme, volume d’un parallélépipède dans \mathbb{R}^d .
- Équation normale d’une droite affine dans \mathbb{R}^2 , d’un plan affine dans \mathbb{R}^3 . Sous-espaces affines perpendiculaires. Projection orthogonale d’un point sur un sous-espace affine. Distance entre deux sous-espaces affines.

5. Géométrie euclidienne dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3

- Relation $\bar{z}_1 z_2 = \langle z_1, z_2 \rangle + i \text{Det}(z_1, z_2)$ pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Angle orienté (déterminé modulo 2π) d’un couple de vecteurs; relations $\langle u_1, u_2 \rangle = \cos \theta \|u_1\| \|u_2\|$ et $\text{Det}(u_1, u_2) = \sin \theta \|u_1\| \|u_2\|$ pour $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, θ désignant un angle orienté de (u_1, u_2) . Coordonnées polaires; équation polaire d’une droite. Angle orienté de droites. Relations trigonométriques dans un triangle.
- Équation cartésienne normale d’un cercle dans \mathbb{R}^2 . Équations paramétriques d’un cercle. Équation polaire d’un cercle passant par l’origine des coordonnées. Détermination d’un cercle par trois points non alignés. Théorème de l’arc capable; condition nécessaire et suffisante pour que quatre points distincts de \mathbb{R}^2 soient alignés ou cocycliques.
- Angle de deux vecteurs dans \mathbb{R}^3 . Coordonnées cylindriques, sphériques.
- Équation cartésienne normale d’une sphère dans \mathbb{R}^3 . Équations paramétriques en coordonnées sphériques.
- Produit vectoriel : pour $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, $u_1 \times u_2$ est l’unique vecteur tel que $\langle u_1 \times u_2, v \rangle = \text{Det}(u_1, u_2, v)$ pour tout vecteur v de \mathbb{R}^3 . Caractérisation géométrique du produit vectoriel. Produit mixte, calcul du produit vectoriel dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Identités de Lagrange, du double produit vectoriel.

6. Coniques

- Définition d’une conique par foyer et directrice; excentricité; ellipse, parabole, hyperbole.
- Équation cartésienne réduite. Centre, sommets, foyers. Asymptotes d’une hyperbole.

- Équation polaire d'une conique dont un foyer est l'origine des coordonnées.
- Caractérisation bifocale des ellipses et des hyperboles.
- Paramétrage des ellipses et des hyperboles au moyen des fonction trigonométriques circulaires et hyperboliques.
- Mouvement à accélération centrale, lois de Kepler.

III - Suites et séries - Fonctions d'une variable réelle

Objectifs

Cette partie pose les fondements de l'analyse des fonctions d'une variable réelle ; elle constitue le noyau du programme d'analyse dans les classes préparatoires. Le cadre en reste toutefois élémentaire : la topologie se résume à l'étude des propriétés globales des fonctions continues d'une variable réelle et seule l'intégration des fonctions continues par morceaux est considérée. On se concentre pour une part essentielle sur une pratique effective de l'analyse : étude de la convergence d'une série ou d'une intégrale, du comportement asymptotique d'une suite ou d'une fonction, de diverses techniques de majorations, etc.

Il est attendu qu'à l'issue de cette partie, les étudiants

- aient assimilé la propriété de complétude de la droite réelle sous ces différentes formes : principe de la borne supérieure, principe des segments emboîtés, convergence des suites de Cauchy ;
- aient appris à utiliser les quantificateurs pour formuler (mettre en formule) certains énoncés et obtenir leur négation ;
- aient une connaissance à la fois théorique et pratique des principales inégalités (inégalités des accroissements finis et de Taylor-Lagrange, inégalité de la moyenne, inégalités de convexité, inégalité de Cauchy-Schwarz, etc.) ;
- soient capables de démontrer les propriétés globales des fonctions continues ;
- aient une bonne maîtrise du calcul des développements limités ;
- sachent établir la convergence ou la divergence d'une série ou d'une intégrale dans des cas standard et en particulier soient capables de comparer une suite ou une fonction positive aux suites ou fonctions de référence ;
- connaissent les techniques d'intégration usuelles ;
- puissent déterminer le rayon de convergence d'une série entière dans des cas simples ;
- aient pratiqué quelques algorithmes de calcul numérique.

Contenu

1. Séries

- Espace vectoriel des séries à termes complexes ; suite des sommes partielles d'une série. Sous-espace vectoriel des séries convergentes ; somme, suite des restes d'une série convergente.
- Série absolument convergente, suite sommable ; inégalité triangulaire. Si une série est absolument convergente, elle est convergente.
- Séries à termes positifs : principe de comparaison, comparaison logarithmique, séries géométriques, critères de Cauchy et de d'Alembert.
- Séries à termes positifs décroissants : critère de condensation de Cauchy, séries de Riemann.
- Développements décimaux.
- Rayon de convergence d'une série entière.
- **Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.**
- **Produit de Cauchy de deux séries entières ;**
- Critère de Leibniz pour les séries réelles alternées, signe et majoration des restes.
- **Sommation par parties (transformation d'Abel).**

2. Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment

- Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment, propriétés usuelles.

- Approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par une fonction en escalier.
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Linéarité, additivité et positivité de l'intégrale. Sommes de Riemann.
- Inégalité de la moyenne.
- Théorème fondamental. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. Primitive sur un intervalle d'une fonction continue par morceaux.
- Formule de changement de variable. Formule d'intégration par parties. Formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale.
- Exemples de calcul d'intégrales et de primitives.
- Intégration numérique : étude et comparaison des méthodes des rectangles et des trapèzes.

3. Intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque

- Définition d'une intégrale (« impropre ») convergente.
- Intégrale absolument convergente, fonction sommable ou intégrable sur un intervalle ; inégalité de la moyenne. Si une intégrale est absolument convergente, elle est convergente.
- Principe de comparaison pour les fonctions positives. Étude de l'intégrabilité sur $]0, 1]$ ou sur $[1, +\infty[$ des fonctions de référence usuelles : $x \mapsto e^{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $x \mapsto x^p$ ($p \in \mathbb{R}$), $x \mapsto |\ln x|$.
- Comparaison de l'intégrale $\int_0^\infty f(t) dt$ et de la série $\sum_{n=0}^\infty f(n)$ pour une fonction $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive et décroissante.
- Formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque.
- Fonctions complexes de carré intégrable ; inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Exemples d'intégrales semi-convergentes.

4. Calculs asymptotiques

- Relations de comparaisons, notations de Landau. Développements limités.
- Formule de Taylor-Young.
- Sommation et intégration des relations de comparaison.
- Exemples de calculs asymptotiques. **Constante d'Euler**. Formule de Stirling.

IV - Entiers - Polynômes - Algèbre linéaire

Objectifs

Cette partie développe l'arithmétique des entiers et des polynômes et introduit aux fondements de l'algèbre linéaire en dimension finie. Les algorithmes d'Euclide (division euclidienne) et de Gauss (méthode du pivot) y ont un rôle central : ils fournissent des démonstrations alternatives constructives des résultats principaux, tels que le théorème de Bézout, le théorème du rang, etc.

Il est attendu qu'à l'issue de cette partie, les étudiants

- sachent appliquer l'algorithme d'Euclide à la détermination d'un pgcd ou d'une relation de Bézout dans l'anneau des entiers ou celui des polynômes à coefficients complexes ;
- aient assimilé la notion d'espace vectoriel et les procédés usuels de construction d'espaces vectoriels ;
- connaissent les conséquences du théorème de la base incomplète (définition de la dimension, théorème du rang) ;
- sachent représenter matriciellement une famille finie de vecteurs ou de formes linéaires et une application linéaire dans une base donnée et utiliser les formules de changement de bases ;
- maîtrisent le passage de l'expression géométrique d'un problème (en termes d'applications linéaires, de sous-espaces vectoriels, etc.) à son expression algébrique (en termes d'équations linéaires, de matrices, etc.) et vice versa ;
- aient compris les mécanismes de dualité (base/système de coordonnées, équations cartésiennes/équations paramétriques, etc.) ;

- puissent manipuler les permutations et calculer leur signature ;
- connaissent la théorie des déterminants.

Contenu

0. Vocabulaire relatif aux structures algébriques

- Groupe, groupe abélien, morphisme de groupes, sous-groupe, noyau et image d'un morphisme de groupes. Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme.
- Anneau, anneau commutatif, anneau intègre. Corps, corps commutatif.
- Espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , sous-espace vectoriel, application linéaire, noyau et image d'une application linéaire.
- Algèbre sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , algèbre avec unité ; morphisme d'algèbres avec unité.

1. Combinatoire élémentaire

- Ensemble fini, nombre d'éléments ou cardinal d'un ensemble fini. Critères usuels de finitude. Une application d'un ensemble fini dans lui-même est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.
- Sommes ou produits finis ; sommation par paquets ; développement d'un produit de sommes dans un anneau commutatif. Formule du binôme.
- Problèmes de dénombrement. Fonction caractéristique d'une partie d'un ensemble. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis. Cardinal d'une réunion finie d'ensembles finis (formule du crible). Nombre d'applications, d'injections, de bijections d'un ensemble fini dans un autre ; nombre de parties, de parties de cardinal donné d'un ensemble fini. Relations usuelles entre coefficients binomiaux.

2. Arithmétique dans \mathbb{Z}

- Relation de divisibilité dans \mathbb{Z} . Nombres premiers. Théorème d'Euclide ; théorème fondamental de l'arithmétique.
- Division euclidienne. Plus grand commun diviseur (pgcd), plus petit commun multiple (ppcm) ; entiers premiers entre eux, théorème de Bézout, lemmes d'Euclide et de Gauss. Algorithme d'Euclide.
- Numération décimale, numération binaire.

3. Polynômes et fractions rationnelles

- Algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans le corps \mathbb{K} égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Degré, coefficient dominant. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$.
- Relation de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, polynômes irréductibles, polynômes associés ; lemme d'Euclide. Décomposition canonique en produit de facteurs irréductibles.
- Division euclidienne. Pgcd, ppcm, polynômes premiers entre eux, théorème de Bézout, algorithme d'Euclide.
- Développement d'un élément de $\mathbb{K}[X]$ suivant les puissances de $X - a$, avec $a \in \mathbb{K}$. Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$, formule de Leibniz ; formule de Taylor.
- Fonction polynômiale associée à un polynôme ; isomorphisme entre l'algèbre des fonctions polynômiales sur \mathbb{K} et $\mathbb{K}[X]$.
- Équation algébrique ; ordre de multiplicité d'une racine (ou d'un zéro) d'un polynôme. Polynôme scindé ; relations de Viète entre racines et coefficients d'un polynôme. Théorème de d'Alembert-Gauss ; éléments irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}(X)$.
- Interpolation de Lagrange.
- Corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{K} ; fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Degré, valuation en un point de \mathbb{K} d'une fraction rationnelle ; zéros, pôles. Partie entière, partie polaire relative à un pôle. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{K}[X]$.

4. Structure d'espace vectoriel

- Espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} , sous-espace vectoriel, application linéaire. Image directe, image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire; noyau, image d'une application linéaire. Isomorphisme.
- Produit d'une famille non vide d'espaces vectoriels sur \mathbb{K} . Espace vectoriel E^A des applications d'un ensemble non vide A dans un espace vectoriel E . Sous-espace vectoriel $\mathcal{L}(E; F)$ de F^E ; espace vectoriel E^* (dual de E) des formes linéaires sur E .
- Application bilinéaire. Bilinearité de la composition $\mathcal{L}(E; F) \times \mathcal{L}(F; G) \rightarrow \mathcal{L}(E; G)$, $(f, g) \mapsto g \circ f$. Algèbre $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E .
- Intersection, somme d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E . Famille de sous-espaces vectoriels en somme directe. Sous-espaces supplémentaires, projecteurs; famille de projecteurs canoniquement associée à une décomposition en somme directe finie. Droite, hyperplan.
- Combinaison linéaire, sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel. Partie ou famille génératrice, libre (famille d'éléments linéairement indépendants). Base, coordonnées dans une base.

5. Théorie de la dimension finie

- Espace vectoriel de dimension finie, c'est-à-dire finiment engendré; théorème de la base incomplète, existence d'une base, définition de la dimension; si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension d , à toute base de E est canoniquement associé un isomorphisme de E sur \mathbb{K}^d .
- Dimension d'un sous-espace vectoriel ou affine d'un espace vectoriel de dimension finie. Rang d'une famille de vecteurs de rang fini. Caractérisation d'une base en dimension finie. Caractérisation d'un système de coordonnées, base duale.
- Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie; caractérisation par la dimension d'une somme directe finie de sous-espaces vectoriels de dimension finie. Sous-espace vectoriel de codimension finie, existence d'un supplémentaire. Rang d'une application linéaire de rang fini; théorème du rang: le rang d'une application linéaire est égal à la codimension de son noyau. Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels de dimension finie.

6. Calcul matriciel

- Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} , base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Multiplication des matrices, propriétés de bilinéarité et d'associativité. Algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées à n lignes à coefficients dans \mathbb{K} ; groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$; sous-algèbre des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures.
- Matrice d'un vecteur ou d'une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E (de dimension finie) dans une base de E ; matrice d'une forme linéaire ou d'une famille finie de formes linéaires sur E dans une base de E ; matrice d'une application linéaire de E dans F dans des bases de E et F . Calcul de l'image d'un vecteur par une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires. Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Matrice de passage d'une base à une autre; formules de changement de bases. Matrices carrées semblables.
- Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme.
- Matrices équivalentes; caractérisation des classes de matrices équivalentes par le rang.
- Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée en termes de changement de système de coordonnées (de base); interprétation duale des opérations élémentaires sur les colonnes.

7. Déterminants

- Groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, de transpositions; génération de \mathfrak{S}_n par les transpositions. Existence d'un unique morphisme de groupes non trivial de \mathfrak{S}_n dans $\{1, -1\}$; exemples de calcul de la signature. Sous-groupe alterné \mathfrak{A}_n .
- Déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, existence et caractérisation du déterminant; formule de développement; développement suivant une ligne ou une colonne. Multiplicativité du déterminant, invariance par transposition des matrices, par similitude. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Sous-groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{K})$.
- Déterminant de Vandermonde. Exemples de calculs de déterminants.

- Comatrice $\text{Com } M$ d'une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; formule $M({}^t\text{Com } M) = ({}^t\text{Com } M)M = (\det M)I_n$. Formules de Cramer.
- Droite des formes n -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n . Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n . Déterminant d'un endomorphisme. Interprétation géométrique. Caractérisation des bases, des automorphismes.
- Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

8. Géométrie euclidienne dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3

- Caractérisations d'une isométrie linéaire (ou automorphisme orthogonal) de \mathbb{R}^n . Groupe orthogonal $O(n)$, groupe orthogonal spécial $SO(n)$. Déterminant (noté Det) d'une famille de n vecteurs de \mathbb{R}^n calculé dans une base orthonormale.
- Toute isométrie de \mathbb{R}^n est une transformation affine. Expression d'une isométrie de \mathbb{R}^n comme composée de réflexions. Déplacements.
- Rotations et réflexions linéaires de \mathbb{R}^2 ; morphisme de groupe canonique de \mathbb{R} sur $SO(2)$.
- Tout déplacement de \mathbb{R}^2 est soit une translation, soit une rotation affine. Composition des rotations affines.
- Rotations, symétries orthogonales, réflexions linéaires. Rotation $r_{e,\theta}$ d'axe porté et orienté par e et d'angle orienté θ ; interprétation géométrique de la formule de Rodrigues $r_{e,\theta} = \text{id}_{\mathbb{R}^3} + (\sin \theta)a_e + (1 - \cos \theta)a_e^2$ où a_e est l'endomorphisme $v \mapsto e \times v$ de \mathbb{R}^3 ; théorème d'Euler, détermination de l'axe et de l'angle orientés d'une rotation donnée par sa matrice dans la base canonique. Classification des rotations et des anti-rotations.
- Tout déplacement de \mathbb{R}^3 est soit une translation, soit une rotation affine, soit un vissage.