Introduction à la géométrie vectorielle

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Table des matières

Commentaires

Ce n'est qu'une première ébauche, revisitez le site vous troiverez surememnt des mises à jour !

I Structure vectorielle de $\mathbb{R}^n$

I.1 Définitions – Exemples

Sur $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, l'ensemble des *n–uplet* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels, on définit les opérations suivantes :

▷ **Addition.** Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

▷ **Multiplication par un réel.** Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

On notera $0_{\mathbb{R}^n}$ le n–uplet nul, i.e. $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots, 0)$ et si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on note $-x$ le n–uplet $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ de sorte que $x + (-x) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Remarque I.1 Dans le cas $n = 1$ $\mathbb{R}^1$ est évidemment $\mathbb{R}$. Alors que $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) représentent avantageusement les vecteurs du plan (respectivement de l'espace) usuel.

Propriétés

Ces opérations vérifient les règles de calcul usuelles suivantes, et toutes les propriétés qui en découlent.

(i) L'addition est commutative, associative, admet $0_{\mathbb{R}^n}$ comme neutre et tout élément x est symétrisable de symétrique $-x$.

(ii) Pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x & (\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x \\ 1x = x & \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \end{array}$$

On dit alors que $\mathbb{R}^n$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ et ses éléments sont appelés **vecteurs**.

(iii) Pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha x = (0, 0, ..., 0) \iff \alpha = 0 \ \textbf{ou} \ x = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Remarquons qu'avec les notations ci-dessus on a :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \ldots + x_n C_n$$

où on a posé pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $C_j = (0, \ldots, 0, \underset{j^{ème}\text{ terme}}{1}, 0, ..., 0)$.

En plus pour tout $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \forall j \in [\![1, n]\!] : \lambda_j = 0.$$

On dit alors que $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est une **base** de $\mathbb{R}^n$ appelée la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

I.2 Combinaison linéaire

On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_p$ de $\mathbb{R}^n$ tout vecteur v de la forme $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j$ où $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont des réels.

Définition I.1 On dit que la famille $(v_1, v_2, ..., v_p)$ $(p \geq 2)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **liée** si l'un des vecteurs v_j est combinaison linéaire des autres. Si non on dit que la famille est **libre**, et dans ce cas, pour tout $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j v_j = 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow \forall j \in [\![1, p]\!] : \lambda_j = 0.$$

Remarque I.2 Une famille formée d'un seul vecteur (v) est libre si et seulement si $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Exemple I.1 La base canonique $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est une famille libre.

Proposition I.1 Toute sous-famille d'une famille libre est libre et toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Preuve: La faire en exercice.

Théorème I.1 Si $(u_1, ..., u_m)$ et $(v_1, ..., v_p)$ sont des familles d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telles $v_1, ..., v_p$ s'expriment comme combinaisons linéaires de $(u_1, ..., u_m)$ et si p est strictement supérieur à m, alors la famille $(v_1, ..., v_p)$ est liée.

Preuve: Grâce à la proposition précédente, il suffit de montrer le théorème pour $p = m + 1$, ce qu'on va faire par récurrence sur m.

- ▷ Si $m = 1$, soient v_1, v_2 combinaison linéaire de u_1, i.e il existe λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $v_1 = \lambda_1 u_1$ et $v_2 = \lambda_2 u_1$ donc
$$\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2 = 0_{\mathbb{R}^n} \tag{I.1}$$
si $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$ alors $v_2 = v_1 = 0$, si non I.1 est une combinaison nulle avec des coefficients non tous nuls.
- ▷ Supposons la propriété vraie pour m $(m \in \mathbb{N}^*)$ et montrons la pour $m + 1$. Soient $v_1, ..., v_{m+1}, v_{m+2}$ C.L de $u_1, ..., u_m, u_{m+1}$, donc
$$\forall i \in [\![1, m + 2]\!], \exists U_i \text{ C.L des } u_j \ (1 \leq j \leq m) \text{ et } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ tels que } v_i = U_i + \alpha_i u_{m+1}$$

Si pour tout $i \in [\![1, m + 2]\!]$ $\alpha_i = 0$ alors $v_1, ..., v_{m+1}$ sont C.L des vecteurs $u_1, ..., u_m$ et donc d'après l'hypothèse de récurrence la famille $(v_1, ..., v_{m+1})$ est liée.

S'il existe $i \in [\![1, m + 2]\!]$ $\alpha_i \neq 0$, quitte à réindexer la famille $(v_i)_{1 \leq i \leq \leq m+2}$, on peut supposer que $\alpha_{m+2} \neq 0$, ce qui permet d'avoir

$$u_{m+1} = \frac{1}{\alpha_{m+2}} (v_{m+2} - U_{m+2}) \text{ et pour tout } i \in [\![1, m + 1]\!] : v_i = U_i + \frac{\alpha_i}{\alpha_{m+2}} (v_{m+2} - U_{m+2})$$

par conséquent pour tout $i \in [\![1, m + 1]\!]$: $v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{m+2}} v_{m+2} = U_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{m+2}} U_{m+2}$ ce qui veut dire que les vecteurs $v_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{m+2}} v_{m+2}, ..., v_{m+1} - \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_{m+2}} v_{m+2}$ s'écrivent comme C.L des vecteurs $u_1, ..., u_m$ et donc d'après l'hypothèse de récurrence la famille $\left(v_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{m+2}} v_{m+2}, ..., v_{m+1} - \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_{m+2}} v_{m+2}\right)$ est liée. On déduit alors facilement que la famille $(v_1, ..., v_{m+1})$ est liée.

I.3 Sous espaces vectoriels

Définition I.2 Soit E une partie **non vide** de $\mathbb{R}^n$. On dit que E sous espace vectoriel (s.e.v) de $\mathbb{R}^n$ si :

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha x + \beta y \in E.$$

Dans ce cas E vérifie les propriétés suivantes :
- ▷ $0_{\mathbb{R}^n} \in E$ et $\forall x \in E : -x \in E$.
- ▷ $\forall x, y \in E : x + y \in E$.
- ▷ Toute combinaison linéaire d'éléments de E est un élément de E.

Exemples

(1) Le singleton $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\mathbb{R}^n$ tout entier sont des s.e.v de $\mathbb{R}^n$ appelés s.e.v triviaux.

(2) Dans $\mathbb{R}^2$, $E=\{(x,x) \mid x\in\mathbb{R}\}$ et $F=\{(-x,x) \mid x\in\mathbb{R}\}$ sont deux s.e.v.

(3) Dans $\mathbb{R}^2$, $E=\{(x,1) \mid x\in\mathbb{R}\}$ n'est pa un s.e.v.

(4) Dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3) vérifiant $x_1+x_2+x_3=0$ est un s.e.v.

(5) ans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3) vérifiant $x_1+x_2+x_3\geq 0$ n'est pas un s.e.v.

Sous espace vectoriel engendré par une partie

Soit une famille $(v_1,v_2,...,v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $v_1,v_2,...,v_p$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ appelé s.e.v engendré par la famille $(v_1,v_2,...,v_p)$, on le note vect $(v_1,v_2,...,v_p)$. i.e.

$$\text{vect}\,(v_1,v_2,...,v_p)=\left\{\sum_{j=1}^{p}\lambda_j v_j \mid (\lambda_1,...,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p\right\}.$$

Théorème I.2 vect $(v_1,v_2,...,v_p)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ et il le plus petit s.e.v contenant les vecteurs $v_1,v_2,...,v_p$.

Preuve: Ici plus petit; c'est au sens de l'inclusion. On pose $E=\left\{\sum_{j=1}^{p}\lambda_j v_j \mid (\lambda_1,...,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p\right\}$, puis on montre que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui contient les v_i $(1\leq i\leq p)$ et que si F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui contient les v_i $(1\leq i\leq p)$, alors $E\subset F$...

I.4 Notion de dimension

Définition I.3 Soit E un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ (qui peut être $\mathbb{R}^n$ lui même) et soit $(v_1,v_2,...,v_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit $(v_1,v_2,...,v_p)$ est une famille génératrice de E si vect$(v_1,v_2,...,v_p)=E$. Si en plus $(v_1,v_2,...,v_p)$ est une famille libre, on dit qu'elle est une base de E.

Exemples

(1) Dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble $E=\{(x,2x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}$ est un s.e.v et la famille $((1,2,0))$ (formée d'un seul vecteur en est une base). Donner deux autres bases de E.

(2) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le sous espace vectoriel E des vecteurs (x_1,x_2,x_3) vérifiant $x_1+x_2+x_3=0$. $((0,-1,1),(0,-1,1))$ est une base de E.

Proposition I.2 Soit E un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ (qui peut être $\mathbb{R}^n$ lui même) et soit $(v_1,v_2,...,v_p)$ une famille de vecteurs de E. $(v_1,v_2,...,v_p)$ est une base de E si et seulement si

$$\forall x\in E, \exists!\,(\lambda_1,...,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p \mid x=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j v_j$$

les λ_j, $1\leq j\leq p$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $(v_1,v_2,...,v_p)$.

Preuve: La faire en exercice.

Proposition I.3 Soit $(v_1,v_2,...,v_p)$ une famille libre de vecteurs $\mathbb{R}^n$. Pour tout vecteur $v\in\mathbb{R}^n$, la famille $(v_1,v_2,...,v_p,v)$ est liée si et seulement si v est combinaison linéaire des vecteurs $v_1,v_2,...,v_p$.

Preuve: Dans un sens c'est évident, dans l'autre sens raisonner par absurde.

Théorème I.3 Tout sous espace vectoriel non nul de $\mathbb{R}^n$ admet une base.

Preuve: Soit E un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ non nul. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des familles libres de E et $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres d'éléments des familles libres de E. Comme la base canonique de $\mathbb{R}^n$ comporte n vecteurs et que tout vecteur de E est C.L des vecteurs de la base canonique alors d'après le Théorème I.1 tout entier $p\in\mathcal{N}$ est inférieur à n. $\mathcal{N}$ est donc une partie majoré de $\mathbb{N}$ elle admet alors un plus grand élément p. Soit $(v_1,...,v_P)$ une famille libre de E puisque $p=\max\mathcal{N}$, alors pour tout vecteur $v\in E$, la famille $(v_1,...,v_P,v)$ est liée. On conclut grâce à la Proposition I.3.

Théorème I.4 Toutes les bases d'un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ comportent le même nombre de vecteurs.
Ce nombre (entier) est appelé la **dimension** de E, on le note $\dim E$.

Preuve: Utilise le Théorème I.1. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E alors tout vecteur de B' est combinaison linéaire des vecteurs de B donc si le nombre d'éléments de B' est supérieur au nombre des éléments de B alors on aboutit à une contradiction grâce au Théorème I.1.

Remarque I.3 Par convention la dimension du s.e.v nul est nulle, $\dim \{0_{\mathbb{R}^n}\} = 0$.

Exemples

(1) $\dim \mathbb{R}^n = n$. La base canonique comporte n vecteurs.

(2) Dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble $E = \{(x, 2x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un s.e.v et la famille $((1, 2, 0))$ est une base. Donc $\dim E = 1$.

(3) Dans $\mathbb{R}^3$, $E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$. $((0, -1, 1), (0, -1, 1))$ est une base de E, donc $\dim E = 2$.

Théorème I.5 Soient E un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ de dimension p alors et $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_m)$ une famille de vecteurs de E.

(i) Si $\mathcal{F}$ est libre alors $m \leq p$.

(ii) Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors $m \geq p$.

Preuve: la faire en exercice.

Remarque I.4 Le théorème permet d'affirmer que tout s.e.v de $\mathbb{R}^n$ est de dimension $\leq n$.

Théorème I.6 Soient E un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ de dimension p alors et $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_p)$ une famille de p vecteurs de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathcal{F}$ est une base (ii) $\mathcal{F}$ est libre (iii) $\mathcal{F}$ est génératrice

Preuve: On montre les trois implications (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(i).
(i)$\Longrightarrow$(ii). C'est par définition d'une base.
(ii)$\Longrightarrow$(iii). On suppose que $\mathcal{F}$ est libre, alors pour tout $v \in E$ la famille $(v_1, ..., v_p, v)$ comportant $p+1$ vecteurs de E est liée (d'après le Théorème I.5). Par conséquent, d'après la Proposition I.3 , v est C.L des vecteurs $v_1, ..., v_p$. Donc la famille $(v_1, ..., v_p)$ est génératrice dans E.
(iii)$\Longrightarrow$(i). En fait c'est (iii)$\Longrightarrow$(ii), on suppose que $\mathcal{F}$ est génératrice, si on suppose par absurde qu'elle est liée alors l'un des v_i (disons v_p) est C.L des autres (disons $v_1, ..., v_{p-1}$) ce qui permet de dire que la famille $(v_1, ..., v_{p-1})$ de $p-1$ vecteurs est génératrice, ce qui contredit le Théorème I.5.

Rang d'une famille de vecteurs

On appelle rang de la famille $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_p)$ de vecteurs de E, la dimension de $\operatorname{vect}(v_1, v_2, ..., v_p)$. On note $\operatorname{rang}((v_1, ..., v_p))$. On a donc

$$\operatorname{rang}((v_1, ..., v_p)) = \dim \operatorname{vect}(v_1, ..., v_p) .$$

Remarque I.5 $\operatorname{rang}((v_1, ..., v_p)) \leq p$ et $\operatorname{rang}((v_1, ..., v_p)) = p$ si et seulement si $(v_1, ..., v_p)$ libre. Et $\operatorname{rang}((v_1, ..., v_p)) \leq n$.

Propriétés

(i) Si on ajoute à l'un des vecteurs v_j une combinaison linéaire des autres vecteurs le rang ne change pas.

(ii) Si on multiplie l'un des vecteurs v_j par un scalaire non nul le rang ne change pas.

En effet: (i) Supposons pour simplifier que l'on ajoute à v_p une C.L $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k v_k$. D'abord en remarquant que tous les vecteurs de la famille $\left(v_1, ..., v_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k v_k\right)$ sont dans vect $(v_1, ..., v_p)$, donc vect $\left(v_1, ..., v_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k v_k\right) \subset$ vect $(v_1, ..., v_p)$. D'autre part pour montrer l'autre inclusion il suffit de montrer que $v_p \in$ vect $\left(v_1, ..., v_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k v_k\right)$ ce qui est vérifié grâce à l'égalité $v_p = -\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k v_k + \left(v_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k v_k\right)$.

(ii) Supposons pour simplifier que l'on remplace v_p par λv_p, il faut montrer que vect $(v_1, ..., v_p) =$ vect $(v_1, ..., \lambda v_p)$, ce qui est évident du fait que $\lambda \neq 0$.

I.5 Sous espaces affines

Définition I.4 Une partie non vide $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^n$ est appelée **sous espace affine** de $\mathbb{R}^n$, s'il existent $a \in \mathbb{R}^n$ et un sous espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\mathcal{X} = a + V = \{a + v \text{ tel que } v \in V\}$$

$\mathcal{X}$ est alors appelé sous espace affine passant par a et de direction V. La dimension de V est aussi appelée dimension de $\mathcal{X}$ et une base de V est appelée système de vecteurs directeurs de X.
Si $\dim(X) = 1$, on dit que X est une droite affine.
Si $\dim(X) = 2$, on dit que X est une plan affine.

Remarque I.6 Si $\mathcal{X} = a + V$ alors $a \in X$ et $\forall b \in \mathcal{X} : \mathcal{X} = b + V$.

Les éléments d'un sous espace affine sont appelés **points.** C'est pourquoi on utilise parfois les notations $\vec{u}, \vec{v}, ..$ pour le point de vue "vecteurs" ou $A, B, ..$ pour le point de vue "point".

Remarque I.7 Si $A + \vec{u} = B$, c.à.d $\vec{u} = B - A$ on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Et cette nouvelle notation vérifie les propriétés suivantes :

- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$. $\vec{0}$ désigne le vecteur nul.
- Relation de Chasle : $\forall A, B, C \in \mathcal{X} : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. En particulier $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Exemple I.2 Tout s.e.v de $\mathbb{R}^n$ est un sous espace affine égal à sa direction.

Exemple I.3 Un singleton $\{a\} \subset \mathbb{R}^n$ est un s.e.a de direction $\left\{\vec{0}\right\}$.

Sous espaces affines parallèles

Soient $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ deux s.e.a de $\mathbb{R}^n$ de directions respectives V et W. On dit que $\mathcal{X}$ est parallèle (au sens large) à $\mathcal{Y}$ si $V = W$ ($V \subset W$).

Remarque I.8 Si $\mathcal{X} = a + V$ alors tous les s.e.a $b + V$ ($b \in \mathbb{R}^n$) sont parallèles à $\mathcal{X}$.

Repère cartésien

Soit $\mathcal{X}$ un s.e.a de $\mathbb{R}^n$ de direction V. Un repère cartésien de $\mathcal{X}$ est un couple $\mathcal{R} = \left(O, (\vec{e}_i)_{1\leq i\leq p}\right)$, où O est un point de $\mathcal{X}$ et $(\vec{e}_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de V.

Donc pour tout point $M \in \mathcal{X}$, il existe $(x_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathbb{R}^p$unique tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{p} x_i \vec{e}_i.$$

L'application $M \longmapsto (x_i)_{1\leq i\leq p}$ est une bijection de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{R}^p$. Le p-uplet $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est appelé **système de coordonnées** du point M dans le repère $\mathcal{R}$.

Remarque I.9 Dans le repère $\mathcal{R} = \big(O, (\vec{e}_i)_{1\le i\le p}\big)$, le point O a pour coordonnées le p-uplet nul. On dit que O est **l'origine du repère**.

Exemple I.4 Dans le cas $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, le repère $\mathcal{R} = (O = (0,0,...,0); ((\vec{e}_i)_{1\le i\le n})$ où $(\vec{e}_i)_{1\le i\le n}$ est la base canonique est appelé le **repère canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Paramétrage d'un sous-espace affine

On suppose $\mathbb{R}^n$ muni du repère canonique $\mathcal{R} = (O, \mathcal{C} = (\vec{e}_i)_{1\le i\le n})$. et on se donne un s.e.a $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^n$, passant par $A(a_1,...,a_n)$ et de direction $\mathrm{vect}(\vec{u}_1,...,\vec{u}_p)$. Pour tout point $M(x_1,...,x_n)$ on a :

$$M \in \mathcal{X} \iff \exists (t_1,...,t_p) \in \mathbb{R}^p : \left\{\begin{array}{l} x_1 = a_1 + t_1\alpha_{1,1} + t_2\alpha_{1,2} + ... + t_p\alpha_{1,p} \\ x_2 = a_2 + t_1\alpha_{2,1} + t_2\alpha_{2,2} + ... + t_p\alpha_{2,p} \\ \qquad\vdots \\ x_n = a_n + t_1\alpha_{n,1} + t_2\alpha_{n,2} + ... + t_p\alpha_{n,p} \end{array}\right.$$

où pour tout $j \in [\![1,p]\!]$: $\vec{u}_j = \big(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, ..., \alpha_{n,j}\big) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i,j}\vec{e}_i$, le système ci-dessus est appelé un paramétrage du s.e.a $\mathcal{X}$.

Exemples

Paramétrage d'une droite dans le plan La droite passant par $A(x_0, y_0)$ et de direction $\vec{u}(\alpha,\beta) \neq \vec{0}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$

Paramétrage d'une droite dans l'espace La droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de direction $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma) \neq \vec{0}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$

Paramétrage d'un plan de l'espace Le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de direction $\big(\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma), \vec{u}'(\alpha',\beta',\gamma')\big)$ famille libre :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + t\alpha + s\alpha' \\ y = y_0 + t\beta + s\beta' \\ z = z_0 + t\gamma + s\gamma' \end{array}\right. ,(t,s) \in \mathbb{R}.$$

Remarque I.10 En éliminant le(s) paramètre(s) t (et s) dans l'équation d'une droite du plan (resp d'un plan de l'espace), on obtient une relation vérifiée par les cordonnées x, y (z) qu'on appelle **équation cartésienne**.

Par exemple dans le cas de droite dans le plan, on a

$$\beta x - \alpha y = \beta x_0 - \alpha y_0$$

est une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq 0$.

II Matrices et systèmes linéaires

II.1 Définitions – Exemples

Définition II.1 On appelle système de n équations linéaires à p inconnues $(p, n \in \mathbb{N}^*)$ à coefficients réels un ensemble d'équations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right. \tag{II.1}$$

qu'on écrit aussi

$$\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{II.2}$$

où les réels $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, ... , $a_{n,1}$ ... $a_{n,p}$ sont appelés les coefficients du système et les réls b_1, b_2, ..., b_n sont appelés les seconds membres du système ; le n-uplet $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ est le **second membre** du système. Enfin x_1, $x_2, ..., x_p$ sont les **inconnues**, que l'on cherche dans $\mathbb{R}$; $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$ est le p-uplet inconnu.

Si le second membre est nul on dit que le système est **homogène**, le système linéaire obtenu lorsqu'on remplace dans (II.1) le n-uplet b par le n-uplet nul

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{array}\right. \tag{II.3}$$

s'appelle le **système homogène associé à** (II.1).

Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} & b_n \end{pmatrix} \tag{II.4}$$

sont appelées respectivement **matrice** et **matrice augmentée** du système (II.1). La matrice A est aussi notée $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ elle est dite de **taille** $n \times p$ (n lignes et p colonnes).

Définition II.2 On dit qu'un système est **compatible** s'il admet des solutions.

Remarque II.1 Un système homogène est toujours compatible puisqu'il admet le p-uplet nul comme solution.

Exemples

(1) $\left\{\begin{array}{lcl} x - y & = & 0 \\ x + y & = & 0 \end{array}\right.$ admet comme unique solution le couple nul $(0, 0)$.

(2) $\left\{\begin{array}{ll} x + y - z & = 0 \\ x - y + z & = 0 \end{array}\right.$ s'écrit aussi $\left\{\begin{array}{ll} 2x & = 0 \\ y & = z \end{array}\right.$ admet comme ensemble solution $\{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} =$ vect $\{(0, 1, 1)\}$.

Théorème II.1 L'ensemble des solutions d'un système homogène (II.3) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ et l'ensemble des solutions d'un système non homogène (II.1) est soit vide soit un sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$ de direction le sous-espace vectoriel des solutions du système homogène associé à (II.1).

Preuve: On note E_0 l'ensemble des solutions de l'équation (II.3). $(0, 0, ..., 0)$ est visiblement un élément de E_0. Et on vérifie facilement la stabilité par combinaison linéaire.

Dans le cas où l'ensemble E des solutions du système non homogène (II.1) est non vide. En prenant une solution a du système (II.1), on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$:

$$x \in E \Longleftrightarrow x - a \in E_0$$

ce qui permet de conclure que $E = a + E_0$.

Exemples

(1) $\left\{\begin{array}{ll} x+y-z &= 0 \\ x-y+z &= 1 \end{array}\right.$ s'écrit aussi $\left\{\begin{array}{ll} 2x &= 1 \\ z &= 1-x+y \end{array}\right.$ équivaut aussi à $\left\{\begin{array}{ll} x &= \dfrac{1}{2} \\ z &= \dfrac{1}{2}+y \end{array}\right.$ admet comme ensemble solution

$$\left\{\left(\frac{1}{2}, y, \frac{1}{2}+y\right) \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + y\,(0,1,1) \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + \operatorname{vect}\{(0,1,1)\}$$

droite affine de $\mathbb{R}^3$ de direction la droite vectorielle $\mathbb{R}\,(0,1,1)$.

(2) $\left\{\begin{array}{ll} x+y-z &= 0 \\ x-y+z &= 1 \\ y-z &= 2 \end{array}\right.$ s'écrit aussi $\left\{\begin{array}{ll} 2x &= 0 \\ 2y-2z &= -1 \\ y-z &= 2 \end{array}\right.$ qui est incompatible.

systèmes linéaires équivalents

Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarque II.2 Si on multiplie les lignes d'un systèmes linéaires par des scalaires non nuls, on obtient un système équivalent.

Ecriture vectorielle

Si on pose $C_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$ pour $j = 1$ à p les p vecteurs colonnes du système, ce dernier s'écrit :

$$x_1C_1 + x_2C_2 + ... + x_pC_p = b \text{ d'inconnues } x_1, ..., x_p$$

où $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ le second membre. Une solution du système est la famille des coordonnées du vecteur b par rapport à la famille $(C_1, ..., C_p)$. La compatibilité du système se traduit par :

Proposition II.1 Le système (II.1) est compatible si et seulement si $b \in \operatorname{vect}(C_1, ..., C_p)$.

II.2 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Somme de matrices

Soient $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ la matrice $A+B$ est $A = \left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'addition vérifie les propriétés usuelles de commutativité et d'associativité et la matrice nulle (tous les coefficients sont nuls) est neutre.

Produit matricielle

Soient $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le m}}$ la matrice AB est la matrice $C = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ donnée par

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!] : c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Schématiquement :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \color{red}{a_{1,j}} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \dots & \color{red}{a\,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & \color{red}{\vdots} & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \color{red}{a_{n,j}} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{a_{i,1}} & \color{red}{a_{i,2}} & \color{red}{\dots} & \color{red}{a_{i,p}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ \\ \qquad \color{red}{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}} \qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}
\end{array}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

La multiplication des matrices est associative et la **matrice identité**

$$I_n \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ de taille } n \times n$$

$$\text{exemples} \quad : \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie

Pour toute matrice A de taille $n \times p$: $AI_p = I_n A = A$.

Par contre le produit matriciel n'est pas commutatif

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mais } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec le produit matriciel le système linéaire (II.1) s'écrit :

$$AX = b \tag{II.5}$$

avec $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ la matrice du système, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ l'inconnue et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ le second membre.

II.3 Système linéaire échelonné

Le système linéaire est dit **échelonné** s'il existe un entier r $(1 \le r \le \min(p,n))$, et une suite d'entiers$(j_1, j_2, ..., j_r)$ telle que $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_r \le p$:

$$a_{i,j_i} \neq 0 \text{ pour } 1 \le i \le r \;\text{ puis } a_{i,j} = 0 \text{ pour } 1 \le i \le r \;\text{ et }\; 1 \le j \le j_i - 1 \text{ avec } i = 2 \text{ si } j_1 = 1$$

c'est-à-dire que les a_{i,j_i} sont les premiers coefficients non nuls des r premières lignes, et

$$a_{i,j} = 0 \text{ pour } \; r+1 \le i \le n \;\text{ et }\; 1 \le j \le p$$

c'est-à-dire que toutes les lignes après les r premières sont nulles.
Les coefficients a_{i,j_i} $(1 \le i \le r)$ sont appellés **pivots** et on remarque qu'il n'y a qu'un pivot par ligne et par colonne.

La matrice associée au système est donc de la forme

$$\left(\begin{array}{cccccccccc}
0 & \cdots & & \lfloor\underline{a_{1,j_1}} & \cdots & & & & \cdots & a_{1,p} \\
 & \cdots & & \cdots & & \lfloor\underline{a_{2,j_2}} & \cdots & & \cdots & a_{2,p} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & \cdots & & & & \cdots & & \lfloor\underline{a_{r,j_r}} & \cdots & a_{r,p} \\
 & \cdots & & & & & & & \cdots & \\
 & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0
\end{array}\right) \tag{II.6}$$

et le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccc}
 & \lfloor\underline{a_{1,j_1}}x_{j_1}+ & \cdots & & & & & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = b_1 \\
 & & & \lfloor\underline{a_{2,j_2}}x_{j_2}+ & \cdots & & & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \\
 & & & & & & \lfloor\underline{a_{r,j_r}}x_{j_r}+ & \cdots & + & a_{r,p}x_p & = b_r \\
 & & & & & & & & & 0 & = b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & 0 & = b_n
\end{array}\right. \tag{II.7}$$

Remarque II.3 Cela signifie que la suite des indices des colonnes des premiers coefficients non nul de chaque ligne est strictement croissante.

L'entier r s'appelle le **rang** du système échelonné (II.7) (ou de la matrice (II.6) du système).
Les inconnues $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$ sont les **inconnues principales** et les autres inconnues sont dites **secondaires**.

Exemples de matrices échelonnées

Les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont échelonnées, les systèmes linéaires homogènes associés sont

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_2 & & = 0 \\ & x_4 & = 0 \end{array}\right. \tag{II.8}$$

dont l'ensembles des solutions est vect $\{(1,0,0,0)\,;(0,0,1,0)\}$,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & +5x_3 & & = 0 \\ & & x_3 & & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array}\right. \tag{II.9}$$

qui s'écrit aussi

$$\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & +5x_3 & & = -2x_2 \\ & x_3 & & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

dont l'ensembles des solutions est vect $\{(-2,1,0,0)\,;(-2,1,0,1)\}$, et

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +7x_2 & & & +9x_5 & = 0 \\ & & 3x_3 & & +x_5 & = 0 \\ & & & 5x_4 & +4x_5 & = 0 \\ & & & & x_5 & = 0 \end{array}\right. \tag{II.10}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{cases} 2x_1 & & & +9x_5 & = -7x_2 \\ & 3x_3 & & +x_5 & = 0 \\ & & 5x_4 & +4x_5 & = 0 \\ & & & x_5 & = 0 \end{cases}$$

dont l'ensembles des solutions est vect $\{(-7/2, 1, 0, 0, 0)\}$.

Par contre les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas échelonées.

Résolution d'un système échelonné

On suppose que le système est compatible, ce qui suppose que le système est de la forme :

$$\begin{cases} & \lfloor\underline{a_{1,j_1}} x_{j_1} & \cdots & & & & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = b_1 \\ & & & \lfloor\underline{a_{2,j_2}} x_{j_2} & \cdots & & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & & & \lfloor\underline{a_{n,j_n}} x_{j_n} & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

il y a probablement plus d'inconnues que d'équations.

En faisant passer les inconnues secondaires dans le second membre et en les considérant comme des paramètres (on a donc $p - n$ paramètres), on peut résoudre le système en commençant par calculer x_{j_n} dans la dernière équation et en remontant pour calculer les autres inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

Exemple

On considère le système échelonné suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 & +7x_2 & & & +9x_5 & = 1 \\ & & 3x_3 & & +x_5 & = 0 \\ & & & 5x_4 & +4x_5 & = 0 \\ & & & & x_5 & = 1 \end{cases} \tag{II.11}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{cases} x_1 & = \dfrac{-8}{2} - \dfrac{7}{2}x_2 \\ x_3 & = -\dfrac{1}{3} \\ x_4 & = -\dfrac{4}{5} \\ x_5 & = 1 \end{cases}$$

dont l'ensembles des solutions est $(-8/2, -1/3, -4/5, 1) + \text{vect}\{(-7/2, 1, 0, 0, 0)\}$ la droite affine passant par $A(-8/2, -1/3, -4/5, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -7/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Théorème II.2 On considère un système échelonné à p inconuues de rang r (II.7).

(i) Si $r = n$ le système linéaire est compatible.

(ii) Si $r < n$ le système est compatible si et seulement si les $n - r$ derniers seconds membres sont nuls. Et dans le cas de système compatible l'ensemble des solutions du système

- ▷ homogène est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ de dimension $p - r$,
- ▷ non homogène est un sous espace affine de $\mathbb{R}^p$ de dimension $p - r$.

Preuve: Si $r = n$ alors $n \leq p$, et le système est compatible d'après la méthode de résolution.

Dans le cas où $r < n$ alors pour que le système (II.7) soit compatible il faut que $b_{r+1} = ... = b_n = 0$ et dans cas on obtient un système échelonné dont le nombre d'équations est égale au rang en éliminant les dérnière lignes nulles. Ce qui ramène l'étude au cas précédent.

Dans le cas d'un système compatible l'ensemble des solutions du système homogène est défini par les $p - r$ inconnues secondaires ce qui permet de voir (intuitivement) qu'il est de dimension $p - r$.

Une démonstration rigoureuse du théorème sera donnée en seconde période.

II.4 Méthode d'élimination de Gauss

A partir d'un système linéaire quelconque la méthode de Gauss permet d'obtenir un système échelonné (donc qu'on sait résoudre) qui est équivalent au premier.

On considère donc un système quelconque (II.1) auquel on associe la matrice A (supposée non nulle) et la matrice augmentée A' (II.4).

Définition II.3 On appelle opération élémentaire sur (II.1) (ou sur les lignes de sa matrice A') une des opérations suivantes :

(i) Permuter deux lignes, (codage $L_i \longleftrightarrow L_j$).

(ii) Multiplier une ligne par un scalaire non nul, (codage $L_i \longleftarrow \lambda L_i$).

(iii) Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, (codage $L_i \longleftarrow L_i + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j L_j$).

Théorème II.3 Toute opération élémentaire sur un systéme linéaire (II.1) le transforme en un système linéaire équivalent.

Preuve: Les cas des opérations élémentaires (i) et (ii) sont évidents. Le cas de l'opération (iii) mérite une petite explication qui peut être faite dans le cas particulier de l'opération $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \neq 0$, et en remarquant qu'elle peut être décomposée en les deux opérations $L_j \longleftarrow \lambda L_j$ et $L_i \longleftarrow L_i + L_j$, il suffit donc de traiter le cas de l'opération $L_i \longleftarrow L_i + L_j$. Il faut justifier que si on ajoute à une ligne d'un système une autre ligne du même système on obtient un système équivalent.

Pour résoudre le système linéaire (II.1), la méthode de Gauss consiste à effectuer sur la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{pmatrix} \tag{II.12}$$

des opérations élémentaires dans un ordre bien déterminé de façon à la transformer en une matrice échelonnée. Puis résoudre le système échelonné correspondant.

Remarque II.4 Il y a en général plusieurs choix d'opérations élémentaires qui permettent de transformer un système linéaire en système échelonné équivalent. Ces différents choix conduisent à des systèmes d'inconnues principales différents. On va décrire la méthode de Gauss dans sa forme la plus simple.

Description de la méthode de Gauss

- ▷ Sur la première colonne j_1 non nulle de la matrice on effectue si nécessaire une permutation de lignes pour avoir le coefficient $(1, j_1)$ non nul.

  Pour $i = 2$ à n, faire $L_i \longleftarrow L_i - \dfrac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} L_1$, ce qui ramène la matrice du système à la forme

$$\begin{pmatrix} \lfloor a'_{1,j_1} & \dots & * & * \\ 0 & & & * \\ \vdots & & (A_2) & \vdots \\ 0 & & & * \end{pmatrix}$$

si la matrice A_2 est nulle c'est terminé (la matrice obtenue est échelonnée), si non elle est de taille $(n-1)\times "p-1"$ et on continue les mêmes opérations avec A_2.

▷ Sur la première colonne j_2 non nulle de la matrice A_2 on effectue si nécessaire une permutation de lignes pour avoir le coefficient $(2,j_2)$ non nul.
Pour $i=3$ à n, faire $L_i \longleftarrow L_i - \dfrac{a_{ij_2}}{a_{2j_2}} L_2$, ce qui ramène la matrice du système à la forme

$$\begin{pmatrix} \lfloor a'_{1,j_1} & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lfloor a'_{2,j_2} & \cdots & * & * \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & (A_3) & \vdots \\ 0 & 0 & & & * \end{pmatrix}$$

si la matrice A_3 est nulle c'est terminé (la matrice obtenue est échelonnée), si non elle est de taille $(n-2)\times "p-2"$ et on continue les mêmes opérations avec A_3.

▷ ... ...

▷ On aboutit donc au bout d'un certain nombre r d'étapes similaires à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lfloor a'_{1,j_1} & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & \lfloor a'_{2,j_2} & \cdots & * & * \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lfloor a'_{r,j_r} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

où $r \leq n$ qui est associée à un système échelonné équivalent au système (II.1). L'entier r est alors appelé le **rang du système**.

Ainsi la méthode de Gauss permet d'énnoncer le théorème suivant.

Théorème II.4 Il existe une suite finie d'opérations élémentaires qui transforme le système linéaire (II.1) en un système échelonné.

Comme pour les systèmes échelonnés, on a le résultat suivant sur la dimension du s.e.v des solutions d'un système homogène :

Théorème II.5 (Théorème du rang) L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à p inconnues de rang r est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ de dimension $p-r$.

Définition II.4 On appelle système d'équations cartésiennes d'un sous-espace affine $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^p$ de dimension $p-r$ tout système linéaire de rang r dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{E}$.

Exemples

Droite dans le plan : $ax+by+c=0 \quad (a,b)\neq(0,0)$.

Plan dans l'espace de dimension 3 : $ax+by+cz+d=0 \quad (a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Droite dans l'espace de dimension 3 : $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ $((a,b,c),(a',b',c'))$ libre.

Remarque II.5 On peut obtenir ces équations cartésiennes à partir d'un système d'équations paramétriques en éliminant les paramètres, ce qui permet d'avoir ces relations entre les coordonnées indépendemment des paramètres.

Remarque II.6 Le travail inverse est aussi possible : en résolvant le système linéaire (ou seulement équation) par la méthode de Gauss, les inconnues secondaires joueront le roles des paramètres.

II.5 Rang d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de taille $n \times p$, on appelle vecteurs colonnes de les p vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \quad 1 \leq j \leq p$$

et on appelle vecteurs lignes de A les n vecteurs de $\mathbb{R}^p$:

$$L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Définition II.5 On appelle rang d'une matrice le rang de ses vecteurs lignes.

Exemples

(1) La matrice nulle est de rang 0.

(2) La matrice I_n est de rang n car ses vecteurs lignes sont ceux de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(3) La matrice J_r de taille $n \times p$ définie par

$$J_r = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{matrix}}^{r\times r} & \overbrace{(0)}^{r\times(p-r)} \\ \overbrace{(0)}^{(n-r)\times r} & \overbrace{(0)}^{(n-r)\times(p-r)} \end{pmatrix}$$

est de rang r car ses r vecteurs lignes non nulles sont extraits de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
En général, on a la proposition :

Proposition II.2 Le rang d'une matrice échelonnée de taille $n \times p$ de la forme

$$\begin{pmatrix} & \lfloor\underline{a_{1,j_1}} & \cdots & & & & \cdots & a_{1,p} \\ & & & \lfloor\underline{a_{2,j_2}} & \cdots & & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & (0) & & \cdots & & \lfloor\underline{a_{r,j_r}} & \cdots & a_{r,p} \end{pmatrix}$$

où a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, ... , a_{r,j_r} sont non nuls est l'entier r.

Preuve: Partant d'une C.L nulle $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j L_j = 0_{\mathbb{R}^p}$, on obtient progressivement $\lambda_1 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$ ...

Proposition II.3 Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifient pas son rang.

Preuve: La même que pour les système. Ici il suffit de vérifier qu'après chaque opération élémentatire sur les lignes le s.e.v engendré par les vecteurs lignes ne change pas. Seul le cas de l'opération du type (iii) $(L_i \longleftarrow L_i + L_j)$ mérite une preuve. Notons $E_1 = \text{vect}\left(L_1, .., L_i, .., L_j, .., L_n\right)$ et $E_1 = \text{vect}\left(L_1, .., L_i + L_j, .., L_j, .., L_n\right)$ et montrons que $E_1 = E_2$, pour celà on remarque qu'il suffit de montrer que $L_i \in E_2$ ce qui vient de l'égalité $L_i = \left(L_i + L_j\right) - L_j$.

Proposition II.4 Le rang d'un système d'équations linéaires homogènes est égal au rang de sa matrice.

Calcul de rang d'une matrice

Comme pour les systèmes linéaires, on effectue sur les lignes de la matrice une suite d'opérations élémentaires pour la ramener à une forme échelonnée.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; on a successivement :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - 4L_1 \end{array} & : & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}; \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 & : & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}; \\ L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_3 & : & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Donc le $\text{rang}(A) = 3$.

Remarque II.7 La démarche précédente permetde déduire une relation de dépendance entre les quatres vecteurs lignes. En remontant les opérations on déduit que

$$\begin{aligned} 0 &= L_4 - 2L_3 = (L_4 - 4L_1) - 2(L_3 + L_2) \\ &= (L_4 - 4L_1) - 2((L_3 - 3L_1) + (L_2 - 2L_1)) \\ &= 6L_1 - 2L_2 - 2L_3 + L_4. \end{aligned}$$

Elle permet aussi d'extraire une famille libre maximale : dans ce cas c'est (L_1, L_2, L_3)

Calcul du rang d'un système de vecteurs $(X_1, ..., X_p)$ de $\mathbb{R}^n$

On calcule celui de la matrice dont les vecteurs lignes sont les X_j $1 \leq j \leq p$. Soit par exemple

$$X_1 = (0,1,2,2,1), X_2 = (1,2,3,0,1), X_2 = (0,2,3,4,1),$$

on forme la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et on a successivement :

$$\begin{array}{ccc} L_2 \longleftrightarrow L_1 & : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 & : & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Donc $\text{rang}(X_1, X_2, X_3) = 3$.

Remarque II.8 L'algorithme de Gauss permet de compléter une famille libre en une base de $\mathbb{R}^p$. Ici $p = 5$ il faut donc 2 vecteurs pour avoir une base de $\mathbb{R}^5$. Pour compléter la famille (X_1, X_2, X_3), on utilise les vecteurs de la base canonique, donc si on pose $X_4 = (0,0,0,1,0)$ et $X_5 = (0,0,0,0,1)$ (ce qui correspond aux deux inconnues secondaires dans le système linéaire homogène associé à A) on a $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ libre. En effet il suffit de remarquer qu'ils n'auront subit aucune transformation s'ils sont placés comme L_4 et L_5 dans A.

II.6 Matrices inversibles

Définition II.6 On dit qu'une matrice carrée A est inversible s'il existe une matrice carrée B telle que $AB = I_n$ Dans ce cas on a aussi $BA = I_n$ et on note A^{-1} la matrice B qu'on appelle la matrice inverse de A.

Remarque II.9 Dans ce cas A^{-1} est aussi inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Exemples

(1) La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Pour calculer l'inverse de A on cherche $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que

$$AB = I_2 \text{ c.a.d } \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui se ramène à la résolution du système

$$\begin{cases} a+2c = 1 \\ 3a+4c = 0 \\ b+2d = 1 \\ 3b+4d = 0 \end{cases}$$

qui donne est inversible et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Remarque II.10 La méthode utilisée ci-dessus n'est pas la seule (heureusement !), on verra deux autres méthodes plus intéressantes.

(3) **Matrices diagonales :** On appelle matrice diagonale toute matrice carré dont tous les coefficients non diagonaux sont nuls donc de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

une telle matrice est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux λ_i $(1 \leq i \leq n)$ sont tous non nuls. et dans ce cas

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Cette propriétés découle rapidement du produit de deux matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

Proposition II.5 Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ inversibles alors AB est aussi inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

En effet: $ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$.

Système linéaire de Cramer

Définition II.7 On dit qu'un système linéaire de taille $n \times n$ est de Cramer si sa matrice est inversible.

Proposition II.6 Si A est carrée inversible de taille $n \times n$ alors pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$:

$$AX = b \Longleftrightarrow X = A^{-1}b$$

donc tout système associé à A admet une unique solution qui peut être calculée en inversant la matrice A.

Remarque II.11 On utilise l'équivalence précédente pour calculer l'inverse d'une matrice en résolvant le système avec un second membre variable.

Exemple

Pour calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on résoud le système

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & = b_1 \\ 3x_1 & +4x_2 & = b_2 \end{cases}$$

par la méthode de Gauss, on a :

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & = b_1 \\ & -2x_2 & = -3b_1 + b_2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x_1 & = -2b_1 + b_2 \\ x_2 & = \dfrac{3}{2}b_1 - \dfrac{b_2}{2} \end{cases}$$

donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Proposition II.7 Si A est carrée de taille $n \times n$ alors inversible si et seulement si $\text{rang}(A) = n$.

En effet: Le s.e.v des solutions du système homogène est nulle donc de dimesion $0 = n - n$ car le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est la seule solution. Ce qui veut dire que le rang du système associé à A est égale n. Donc $\text{rang}(A) = n$.

Réciproquement si $\text{rang}(A) = n$ alors le rang de tout système associé à A est n et par conséquent d'après la méthode de *Gauss* il admet au moins une solution (car le rang est égal au nombre de lignes du système donc le système échelonné obtenu par la méthode de *Gauss* est compatible). Donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ le système $AX = C_j$ (où C_j est le $j^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$) admet une solution X_j, donc si on considère la matrice B dont les vecteurs colonnes sont les X_j $(1 \leq j \leq n)$ on aura $AB = I_n$.

Proposition II.8 Si A est carrée de taille $n \times n$ (respectivement $p \times p$) inversible alors pour toute matrice M de taille $n \times p$: $\text{rang}(AM) = \text{rang}(M)$ (respectivement $\text{rang}(MA) = \text{rang}(M)$.

En effet: D'une part si A est de taille $n \times n$, les deux systèmes homogènes $(AM)\,X = 0$ et $MX = 0$ sont équivalents et ont donc même rang. D'autre part si A est de taille $p \times p$, Les lignes L'_i $(1 \leq i \leq n)$ de la matrice MA sont obtenues en effectuant les produit des lignes L_i $(1 \leq i \leq n)$ de M par A :

$$\text{pour tout } i, 1 \leq i \leq n : L'_i = L_i A$$

donc pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L'_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i A A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} A^{-1} \\ & \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui permet de dire que $\text{rang}\,(L_1, L_2, ..., L_n) = \text{rang}\,(L'_1, L'_2, ..., L'_n)$.

Inversion d'une matrice carrée : algorithme de Gauss-Jordan

L'algorithme de Gauss-Jordan utilise les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice pour calculer son inverse. Partant d'une matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

de rang n donc inversible, l'algorithme propose la résolution , par la méthode d'élimination de Gauss, du système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+ & a_{1,2}x_2+ & \cdots & +a_{1,n}x_n = y_1 \\ a_{2,1}x_1+ & a_{2,2}x_2+ & \cdots & +a_{2,n}x_n = y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1}x_1+ & a_{n,2}x_2+ & \cdots & +a_{n,n}x_n = y_n \end{cases}$$

où le second membre est variable.

Pour celà on remarque que ce système s'écrit aussi

$$AX = I_nY \ \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ \text{ et } \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

qu'on essai de ramener à la forme

$$X = BY \quad \text{où } B = A^{-1}$$

et ceci à l'aide d'opérations élémentaires qu'on effectue en parallèle sur les deux matrices A et I_n.

► On dispose donc les deux matrices A et I_n comme une matrice de taille $(n \times 2n)$:

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_n} \end{array}\right)$$

► On utilise l'algorithme de Gauss pour la ramener à la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,n} & b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & b_{2,1} & b_{2,2} & \ddots & b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & a'_{n-1,n} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{n,1} & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{array}\right)$$

Remarque II.12 Si on ne connait pas le rang de la matrice et on tente de l'inverser, la méthode de Gauss permet en même temps de vérifier si son rang est égal à n ou non, si c'est le cas on continue si non on saura que la matrice n'est pas inversible.

► On continue toujours avec les lignes en **remontant** pour ramener le premier bloc de la matrice précédente à la matrice I_n :
▷ ▷ Pour $j = n$ à 2 et pour $i = 1$ à $j - 1$, effectue les opérations :

$$L_i \longleftarrow L_i - a'_{i,j}L_j$$

ce qui transforme les deux blocs précédents à la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_n} & \underbrace{\begin{matrix} b'_{1,1} & b'_{1,2} & \cdots & b'_{1,n} \\ b'_{2,1} & b'_{2,2} & \cdots & b'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b'_{n,1} & b'_{n,2} & \cdots & b'_{n,n} \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

Exemple

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on pose

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on a successivement :

$$\begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 3L_1 : \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right); \\ L_2 & \longleftrightarrow & -\dfrac{1}{2}L_2 : \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right); \\ L_1 & \longleftarrow & L_1 - 2L_2 : \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right); \end{array}$$

donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, on pose

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on a successivement :

$$\begin{array}{rl} \begin{array}{c} L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array} & : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right); \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2 & : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right); \\ L_3 \longleftrightarrow \dfrac{-1}{7}L_3 & : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -2/7 & -1/7 \end{array}\right); \\ \begin{array}{c} L_2 \longleftarrow L_2 + 4L_3 \\ L_1 \longleftarrow L_1 - L_3 \end{array} & : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2/7 & 0 & 1/7 \\ 0 & -2 & 0 & -1/7 & -1/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -2/7 & -1/7 \end{array}\right); \\ L_2 \longleftrightarrow \dfrac{-1}{2}L_2 & : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2/7 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 & 1/14 & 1/14 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -2/7 & -1/7 \end{array}\right); \\ L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2 & : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & 0 & 1/14 & 1/14 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -2/7 & -1/7 \end{array}\right); \end{array}$$

donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 & -3/7 \\ 1/14 & 1/14 & 2/7 \\ 5/7 & -2/7 & -1/7 \end{pmatrix}$.

Opération élémentaires et produit matriciel

On a pu remarquer que l'algorithme de Gauss Jordan permet de ramener par des opérations élémentaires la matrice I_n à une matrice inversible plus complexe A^{-1} qui vérifie $A^{-1}A = I_n$ (I_n étant obtenue à partir de A). Plus précisemment, on a :

Théorème II.6 Soit A une matrice de taille $n \times p$.

(i) Toute opération élémentaire sur les lignes de A correspond à la multiplication de A à gauche par la matrice (inversible) obtenue en faisant subir à I_n la même opération.

(ii) Toute opération élémentaire sur les colonnes de A correspond à la multiplication de A à droite par la matrice (inversible) obtenue en faisant subir à I_n la même opération.

Preuve: La faire en exercice.

II.7 Transposée d'une matrice

Définition II.8 Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ une matrice à coefficients réels de taille $n \times p$, on appelle transposée de A la matrice de taille $p \times n$ notée ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}}$ définie par

$$\forall\,(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!] : b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemple :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ alors } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque II.13 Il est clair que

$${}^t\left({}^tA\right) = A.$$

Proposition II.9 Soient $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le m}}$, alors

$${}^t(AB) = \left({}^tB\right)\left({}^tA\right).$$

Preuve: La faire en exercice

Proposition II.10 Si A est une matrice de taille $n \times n$ inversible alors ${}^tA$ est aussi inversible et

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right).$$

Théorème II.7 une matrice et sa transposée ont même rang.

Preuve: Il faut montrer que le rang des vecteurs lignes est égal au rang des vecteurs colonnes. On note $L_1, ..., L_n$ les vecteurs lignes et $C_1, ..., C_p$ les vecteurs colonnes et on montre que toute opération élémentaire sur les colonnes ne change pas le rang des vecteurs lignes. Pour s'en sortir rapidement on peut utiliser le Théorème II.6 et la Proposition II.8.

III Déterminants d'ordre 2 ou 3

III.1 Définitions – Exemples

– Déterminant d'une famille de vecteurs dans la base canonique en dimension 2 ou 3 ;

orientation canonique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

base directe, indirecte.

III.2 Déterminant d'une matrice

; multiplicativité du déterminant.

III.3 Formules de Cramer

pour des systèmes de 2 ou 3 équations.