Fonctions vectorielles

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Table des matières

Fonctions d'une variable réelle (22 heures)

1. Convergence dans $\mathbb{R}^d$

- Fonction continue, continue à gauche / à droite en un point ; fonction continue sur un intervalle ; fonction continue par morceaux sur un segment.
- C-algèbre $C(I)$ des fonctions continues à valeurs complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- La convergence d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ équivaut à la convergence de chacune de ses composantes (dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$).
- Convergence des fonctions réelles monotones.
- Condition de Cauchy, critère général de convergence de Cauchy.
- Comparaison des fonctions usuelles.

2. Propriétés globales des fonctions continues

- Théorème des valeurs intermédiaires.
- Caractérisation des homéomorphismes d'un intervalle sur un intervalle.
- Toute fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie et continue sur un segment est bornée ; si de plus elle est à valeurs réelles (d = 1), elle atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure.

3. Fonctions dérivables

- Dérivabilité en un point, dérivabilité à droite, à gauche. Combinaison linéaire, produit, quotient, composée de fonctions dérivables en un point.
- Fonctions dérivables, de classe C^1 sur un intervalle. Fonctions n fois dérivables, de classe C^n, de classe C^∞.
- Dérivabilité et dérivées des fonctions usuelles.
- Théorème de Rolle, formule des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles. Inégalité des accroissements finis. Théorème de prolongement de la dérivée. Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Caractérisation des fonctions constantes, monotones. Caractérisation des difféomorphismes d'intervalles.
- Fonctions à valeurs réelles convexes de classe C^2 ; inégalité de convexité ; inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young, inégalité arithmético-géométrique.
- Résolution numérique d'une équation par la méthode de Newton, convergence quadratique.

4. Calculs asymptotiques

- Relations de comparaisons, notations de Landau. Développements limités.
- Formule de Taylor-Young.
- Sommation et intégration des relations de comparaison.
- Exemples de calculs asymptotiques.

Les fonctions considérées dans la suite sont définies sur une partie de $\mathbb{R}$ généralement intervalle ou unions finie d'intevalles à valeur dans $\mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N}^*)$. Ainsi une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ est donnée par ses d composantes $(f_1, ..., f_d)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$, de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = (f_1(x), ..., f_d(x)).$$

I Limites et continuité

I.1 Définitions – Exemples

Soient $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, a adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}^d$.

Définition 1 On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers a, ou que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si $\lim\limits_{x \to a} \|f(x) - \ell\| = 0$, ie:

(1) Si $a \in \mathbb{R}$,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

(2) Si $a = +\infty$,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}, x \geq A \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

(3) Si $a = -\infty$,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}, x \leq A \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1 Dans les définitions ci-dessus le réel ε peut être pris aussi petit que l'on veut, ainsi une condition du type $\varepsilon < 10^{-10}$ est sans "danger".

Exemples

(1)

(2)

Définition 2 Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $a \in \mathcal{D}$. On dit que f est continue en $a \in \mathcal{D}$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Limite à droite et limite à gauche en un point

Il arrive que certaines fonctions ne soient définies que d'un seul côté par rapport à un point a ou qu'elles changent de comportement en passant d'un côté à l'autre du point a, dans ce cas on définit les notions de limite et continuité à gauche et à droite.

Définition 3 Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et a un point adhérent à $\mathcal{D}$. On dit que f admet une limite ℓ à droite (respectivement à gauche) de a si la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]a, +\infty[$ (respectivement à $\mathcal{D} \cap]-\infty, a[$) admet ℓ pour limite en a. On écrit $\lim\limits_{a^+} f(x) = \ell$ (respectivement à $\lim\limits_{a^-} f(x) = \ell$).

Définition 4 Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que f est continue à droite (respectivement à gauche) de a si $\lim\limits_{a^+} f(x) = f(a)$ (respectivement à $\lim\limits_{a^-} f(x) = f(a)$).

Proposition 1 Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $a \in \mathcal{D}$. f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Preuve: Il suffit d'utiliser les définitions des limites. ▪

Théorème I.1 Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et a un point adhérent à $\mathcal{D}$. Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

Remarque 2 Les propriétés les même que dans le cas des fonctions numériques. En particulier la somme, le produit et le quotient de fonctions continues en un point a est continu. et on a donc aussi le résultat sur la composition des limites, qui est aussi valable pour la composée d'une suite et une fonction.

Théorème I.2 Soient $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}' \subset \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{R}^d$, et soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ tels que $\lim\limits_{a} f = b$ et $\lim\limits_{b} g = \ell$ alors $\lim\limits_{a} g \circ f = \ell$. En particulier la composée de fonctions continues est continue.

Théorème I.3 Condition de Cauchy, critère général de convergence de Cauchy. La condition de Cauchy en b pour une fonction $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^d$, avec $b \in]a, +\infty]$, à savoir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[| \forall x, x' \in [a, b[: x, x' > c \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

est nécessaire et suffisante pour que la limite $\lim_{x \to b} f(x)$ existe.

Le résultat suivant ramène l'étude d'une limite de fonction à valeur dans $\mathbb{R}^d$ à l'étude des limites de fonctions réelles:

Théorème I.4 La convergence d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ équivaut à la convergence de chacune de ses composantes (dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$).

Exemples

(1)

(2)

Théorème I.5 Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et a un point adhérent à $\mathcal{D}$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}^d$) alors f est bornée au voisinage de a.

Théorème I.6 Convergence des fonctions réelles monotones. Dans le cas de fonctions réelles (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), on a:

I.2 Propriétés globales des fonctions continues

Définition 5 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$, on dit que f est continue sur I si elle l'est en tout point de I (si I n'est pas ouvert, la continuuité sur I comprend la $\frac{1}{2}$-continuité aux extrêmités), ce qui équivaut à la continuité de ces composantes.
On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^d)$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition 2 Si f est continue alors $\|f\|$est aussi continue.

Proposition 3 L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^d)$ des fonctions continues sur I à valeur dans $\mathbb{R}^d$ est stable pour les lois usuelles.

Remarques

(1) Si f est continue sur $[a, b]$ et $[b, c]$ alors f est continue sur $[a, c]$.

(2) Si f est continue sur I et $J \subset I$ alors f est continue sur J.

Théorème I.7 *Théorème des valeurs intermédiaires :* si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et si y est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = y$. Il en résulte que l'image d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue réelle définie sur I est un intervalle.

Preuve: On suppose $f(a) < t < f(b)$ et $a < b$. On note A l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq t\}$$

et on montre que $c = \sup A$ répond à la question, ie: $f(c) = t$.
En effet si $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n x_n = c$, alors $\lim_n f(x_n) = f(c)$, et comme $f(x_n) \leq t$ pour tout n alors $\boxed{f(c) \leq t}$.
Inversement, $c < b$ car $f(b) > t$ et $\forall x \in]c, b[: f(x) > t$ donc $\lim_{c^+} f(x) \geq t$ alors $\boxed{f(c) \geq t}$, ce qui achève la preuve ▪

Théorème I.8 Pour qu'une application $f : I \longrightarrow J$ d'un intervalle I dans un intervalle J soit un homéomorphisme de I sur J, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit satisfaite :

- la fonction f est strictement monotone et surjective,
- la fonction f est continue et bijective.

Preuve: On suppose f strictement croissante. $f^{-1}(J)$ est un inervalle et f^{-1} strictement croissante, pour montrer que f^{-1} est continue on montre en général le lemme suivant.

Lemme I.1 Si $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante telle que $g(J)$ est un intervalle, alors g est continue.

Soit $t \in J$, on sait que $\lim\limits_{t^-} g(x) = \sup\limits_{x<t} g(x)$ et $\lim\limits_{t^+} g(x) = \inf\limits_{x>t} g(x)$ existe et on a

$$\lim_{t^-} g(x) \leq g(t) \leq \lim_{t^+} g(x)$$

Si par absurde on suppose que $\lim\limits_{t^-} g(x) < g(t)$, alors il existe z tels que $\lim\limits_{t^-} g(x) < z < g(t)$.

Et d'après le TVI, il existe $r < t$ tel que $g(r) = z > \lim\limits_{t^-} g(x) = \sup\limits_{x<t} g(x)$, ce qui absurde.Ce qui démontre le lemme et par suite le théorème ▪

Théorème I.9 On montre que l'image d'un chemin fini $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est bornée; si de plus f est à valeurs réelles $(d = 1)$, $f([a, b])$ est un segment.

Preuve: en appliquant le principe de la borne supérieure ou celui des segments emboîtés. Soit $\beta = \sup\limits_{x\in I} f(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, il existe une suite $(f(x_n))$ d'éléments de $f([a, b])$ qui converge vers β. La suite (x_n) étant bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une sous suite (z_n) de (x_n) qui converge vers un certain $c \in [a, b]$, et comme f est continue $(f(z_n))$ converge vers $f(c) = \beta = \lim\limits_{n} f(x_n)$.

De même pour $\alpha = \inf\limits_{x\in I} f(x)$. Donc $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$, cqfd ▪

II Fonctions dérivables

Vu en grande partie, On précisera juste la définition de la dérivabilité pour les fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^d$. et les démo des théorèmes généraux:

Pour la multiplication on a la formule de **Leibniz** suivante:

Théorème II.1 (Formule de Leibniz) Si $f, g \in D^n(I, \mathbb{R})$ alors $fg \in D^n(I, \mathbb{R})$ et on a:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)} g^{(n-p)}.$$

Preuve: Par récurence sur n. Elle en tout point semblable à cette la formule du binome de Newton dans un anneau. ▪

II.1 Théorème généraux

Théorème II.2 Pour qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I induise un difféomorphisme de I sur l'intervalle $f(I)$, il faut et il suffit que f soit de classe C^1 et que f' ne s'annule pas.

Théorème II.3 Théorème de Rolle,

Théorème II.4 Formule des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles.

Théorème II.5 Inégalité des accroissements finis.

Théorème II.6 Théorème de prolongement de la dérivée.

Théorème II.7 Inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème II.8 Caractérisation des fonctions constantes, monotones.

II.2 Fonctions à valeurs réelles convexes

Fonctions à valeurs réelles convexes de classe $\mathcal{C}^2$; inégalité de convexité ; inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young, inégalité arithmético-géométrique.

III Fonctions convexes

III.1 Définitions - Exemples

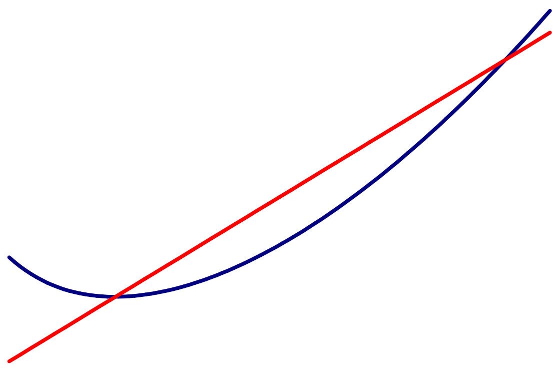
Définition 6 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I intervalle non vide et non réduit à un point). On dit que convexe sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que concave sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Interprétation graphique



Fonction convexe. La courbe est au dessus de la corde

Définition 7 L'épigraphe de f est la partie du plan située au dessus de la courbe.

$$\text{epi}(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$

On a alors l'équivalence: f convexe (resp concave) si et seulement si epi(f) est convexe (resp concave).

Exemple 1

1. Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.
2. Les fonctions $x \longmapsto |x|$; $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$
3. Les fonctions $x \longmapsto \sqrt{x}; x \longmapsto \ln x$ sont concaves sur $\mathbb{R}$.

Propriétés

P III.1 La somme de fonctions convexes (resp concave) est convexe (resp concave).

P III.2 Si $k > 0$ (resp $k < 0$) et f convexe alors $k.f$ est convexe (resp concave).

P III.3 Si f est convexe alors $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in I^n, \forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i = 1$ on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Preuve: par récurrence sur n. ∎

Remarque 3 Si f est concave alors $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in I^n, \forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i = 1$ on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

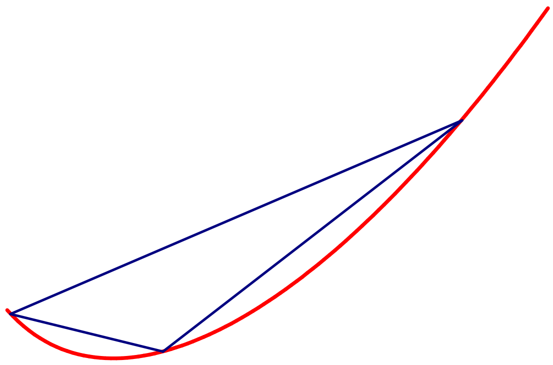
Définition 8 (Fonction strictement convexe) On dit que f est strictement convexe si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in]0,1[$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

III.2 Caractérisation des fonctions convexes

Théorème III.1 (Lemme des trois pentes) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. f est convexe sur I si et seulement si

$$\forall x < y < z \in I : \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$



Fonction convexe. Lemme des trois pentes.

Théorème III.2 f convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction

$$\varphi_a : \begin{array}{rcl} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

est croissante.

Preuve: On démontre l'équivalence... ▪

III.3 Convexités et dérivabilité

Théorème III.3 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I (I intervalle) alors on a

1. f convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
2. f concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Théorème III.4 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I alors on a

1. f convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$sur I.
2. f concave sur I si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I.

Définition 9 (point d'inflexion) Un point où la fonction change de concavité est dit point d'inflexion de la courbe de f.

Remarque 4 Si f est deux fois dérivable, un point d'inflexion est un point où la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe.

Exemple 2 $f(x) = x^3$. et $f(x) = x^4$.

Théorème III.5 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur I (I intervalle) alors on a

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Remarque 5 Le théorème précédent exprime le fait que le graphe d'une fonction convexe est situé au dessus de ses tangentes.

Lien avec l'optimisation

On veut résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } x_0 \in I \text{ tel que} \\ f(x_0) = \min\limits_{x \in I} f(x). \end{cases}$$

- Si f est dérivable un tel point ,s'il existe est un point critique, i.e:

$$f'(x_0) = 0$$

- Si en plus f est convexe alors tout point critique est solution du problème initial. En effet: f' étant croissante donc si elle s'annule en x_0 alors elle est ≤ 0 à gauche de x_0 et ≥ 0 à droite de x_0, donc elle présente un minimum en x_0.
- Si en plus f est strictement convexe alors le point critique ci-dessus est unique, et donc le problème initial admet une solution unique.

III.4 Inégalités de convexité

On obtient des inégalités intéressantes, dites (inégalités de convexité) de la façon suivante:

1. On se donne une fonction f.
2. On vérifie qu'elle est convexe (ou concave) sur I en calculant f''.
3. On ecrit l'inégalité de convexité (éventuellement généralisée).

Exemple 3 Avec la fonction $x \longmapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n : \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + ... + \dfrac{1}{x_n}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}.$$

Exemple 4 Avec la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n : (x_1 + ... + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

Inégalité de Young

$\forall u, v \in \mathbb{R}_+^*, \forall p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on a:

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Inégalité de Holder

De l'inégalité de Young, on déduit l'inégalité suivante dite de Holder.

$$\forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n : \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

III.5 Méthode de Newton

IV Calculs asymptotiques

IV.1 Relations de comparaison

Soient $f; g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$.

Domination

Définition 10 On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un réel λ et un voisinage V_a de a tels que

$$\forall x \in V_a : |f(x)| \leq \lambda |g(x)|.$$

On note alors $f = O(g)$ $(x \longrightarrow a)$ ou $f(x) = O(g(x))$ $(x \longrightarrow a)$. Si g ne s'annule pas, on a:

$$f = O(g) \ (x \longrightarrow a) \Longleftrightarrow \frac{f}{g} \text{ est bornée sur un voisinage de } a.$$

Exemple 5

1. $f = O(f)$ $(x \longrightarrow a)$; $f = O(\mu f)$ $(x \longrightarrow a)$ pour tout $\mu \neq 0$.
2. $f = O(1)$ $(x \longrightarrow a)$ signifie que f est bornée au voisinage de a.
3. $\sqrt{x^2 + x + 1} = O(x)$ $(x \longrightarrow +\infty)$.

Propriétés

P IV.1 Si $f = O(g)$ $(x \longrightarrow a)$ et $g = O(h)$ $(x \longrightarrow a)$ alors $f = O(h)$ $(x \longrightarrow a)$.

P IV.2 Si $f_1 = O(g)$ $(x \longrightarrow a)$ et $f_2 = O(g)$ $(x \longrightarrow a)$ alors $f_1 + f_2 = O(g)$ $(x \longrightarrow a)$.

Remarque 6 $[f_1 = O(g_1)\ (x \longrightarrow a) \text{ et } f_2 = O(g_2)\ (x \longrightarrow a)] \not\Rightarrow [f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)\ (x \longrightarrow a)]$.
Exemple: Au voisinage de $+\infty$: $f(x) = x^2 + x = O(x^2)$ et $g(x) = -x^2 = O(-x^2)$ mais $f(x) + g(x) = x \neq O(0)$.

P IV.3 Si $f_1 = O(g_1)$ $(x \longrightarrow a)$ et $f_2 = O(g_2)$ $(x \longrightarrow a)$ alors $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$ $(x \longrightarrow a)$.

Prépondérance

Définition 11 On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction $\varepsilon(x)$ définie dans un voisinage V_a de a telle que

$$\forall x \in V_a : f(x) = \varepsilon(x) g(x) \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Ou de manière équivalente si $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ telque } \forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap I : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

On note alors $f = o(g)$ $(x \longrightarrow a)$ ou $f(x) = o(g(x))$ $(x \longrightarrow a)$. Si g ne s'annule pas, on a:

$$f = o(g) \ (x \longrightarrow a) \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple 6 $x = o(x^2)$ $(x \to +\infty)$; $\dfrac{1}{x} = o(\dfrac{1}{x^2})$ $(x \to 0)$; $x^2 = o(x)$ $(x \to 0)$.
$f = o(1)$ $(x \to a)$ exprime le fait que $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$.

Exemple 7 Fonctions usuelles:

$x \longrightarrow +\infty$	$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall r > 1 : x^\alpha = o(r^x)$.
	$\forall \alpha < \beta \in \mathbb{R} : x^\alpha = o(x^\beta)$.
	$\forall \alpha > 0 : \ln x = o(x^\alpha)$.
$x \longrightarrow 0$	$\forall \alpha > 0 : \ln x = o(\dfrac{1}{x^\alpha})$.
	$\forall \alpha < \beta \in \mathbb{R} : x^\beta = o(x^\alpha)$.
	$\forall \alpha, \beta > 0 : x^\alpha = o\left[(\ln x)^\beta\right]$.

Propriétés

P IV.4 Si $f = o(g)$ $(x \longrightarrow a)$ et $g = o(h)$ $(x \longrightarrow a)$ alors $f = o(h)$ $(x \longrightarrow a)$.

P IV.5 Si $f_1 = o(g)$ $(x \longrightarrow a)$ et $f_2 = o(g)$ $(x \longrightarrow a)$ alors $f_1 + f_2 = o(g)$ $(x \longrightarrow a)$.

Remarque 7 $[f_1 = o(g_1)\ (x \longrightarrow a)$ et $f_2 = o(g_2)\ (x \longrightarrow a)] \not\Rightarrow [f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)\ (x \longrightarrow a)]$.
Exemple: Au voisinage de $+\infty$: $f(x) = x^2 + x = o(x^3)$ et $g(x) = -x^2 = o(-x^3)$ mais $f(x) + g(x) = x \neq o(0)$.

P IV.6 Si $f_1 = o(g_1)$ $(x \longrightarrow a)$ et $f_2 = o(g_2)$ $(x \longrightarrow a)$ alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ $(x \longrightarrow a)$.

Équivalence

Définition 12 On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si

$$f - g = o(g)\ (x \longrightarrow a).$$

On note alors $f \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g(x)$ $(x \longrightarrow a)$, ou de manière équivalente il existe une fonction φ définie sur un voisinage V_a de a telle que

$$\forall x \in V_a : f(x) = \varphi(x) g(x)$$

Si g ne s'annule pas, on a:

$$f \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g\ (x \longrightarrow a) \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 1.$$

Exemple 8

1. $\sin x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$; $\tan x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$; $1 - \cos x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
2. $e^x - 1 \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$; $\ln(1 + x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$; $[(1 + x)^\alpha - 1] \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \alpha x$.
3. Si $a_n \neq 0 : a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$.
4. En général si

$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$$

Alors au voisinage de a, on a:

- $\sin f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} f(x)$.
- $\tan f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} f(x)$.

- $1 - \cos f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} \dfrac{f(x)^2}{2}$.
- $e^{f(x)} - 1 \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} f(x)$.
- $\ln(1 + f(x)) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} f(x)$.
- $[(1 + f(x))^\alpha - 1] \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \alpha f(x)$.

Propriétés

P IV.7 La relation $\underset{x \longrightarrow a}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

P IV.8 Si $f \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g$ $(x \longrightarrow a)$ et $g \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell$ alors $f \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell$.

P IV.9 Si $f \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell \neq 0$ alors $f \underset{x \longrightarrow a}{\sim} \ell$.

P IV.10 Si $f_1 \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g_1 g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x \longrightarrow a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

Remarque 8 $\left[f_1 \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g_2\right] \not\Rightarrow \left[f_1 + f_2 \underset{x \longrightarrow a}{\sim} (g_1 + g_2)\right]$.
Exemple: Au voisinage de $+\infty$: $f(x) = x^2 + x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} x^2$ et $g(x) = -x^2 \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} -x^2$ mais $f(x) + g(x) = x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\not\sim} (0)$.

P IV.11 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g$ sont positives alors $f^\alpha \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g^\alpha$.

Théorème IV.1 Si $f \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g$ alors il existe un voisinage de a sur lequel f et g ont même signe.

IV.2 Formule de Taylor-Young. Développements limités

IV.3 Intégration des relations de comparaison.

IV.4 Exemples de calculs asymptotiques. Formule de Stirling.