

Coniques

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Table des matières

I	Généralités	1
I.1	Définitions	1
I.2	Parabole ($e = 1$)	2
I.3	Ellipse ($e < 1$)	3
I.4	Hyperbole ($e > 1$)	4
II	Compléments	5
II.1	Équation des tangentes	5
II.2	Lois de Kepler	5

I Généralités

I.1 Définitions

Définition I.1 Soit \mathcal{D} une droite du plan, F un point non situé sur \mathcal{D} et e un réel strictement positif. L'ensemble :

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \mid MF = ed(M, \mathcal{D}) \right\}$$

est la **conique d'excentricité e** , de **foyer F** et de **directrice \mathcal{D}** , appelé :

- *hyperbole* si $e > 1$,
- *ellipse* si $e < 1$,
- *parabole* si $e = 1$.

La perpendiculaire Δ à \mathcal{D} passant par F est, de façon immédiate un axe de symétrie de \mathcal{C} , appelé l'**axe focal** de la conique.

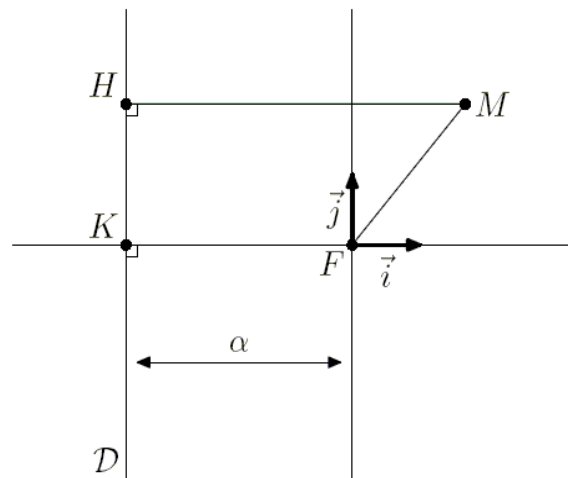
Equation cartésienne

Si on note α la distance du foyer F à la directrice \mathcal{D} (i.e. $\alpha = d(F, \mathcal{D})$), le réel $\boxed{p = e\alpha}$ est appelé *paramètre* de la conique. Si on considère le repère orthonormé (F, \vec{i}, \vec{j}) dans lequel \mathcal{D} admet pour équation $X = -\alpha$, on a :

$$d(M, \mathcal{D})^2 = (X + \alpha)^2 \text{ et } MF^2 = X^2 + Y^2$$

donc l'équation cartésienne de la conique \mathcal{C} est :

$$(1 - e^2)X^2 + Y^2 - 2epX - p^2 = 0 \quad (\text{I.1})$$



éléments d'une conique

Equation polaire

En considérant l'axe polaire (F, \vec{i}) , on a :

$$\begin{aligned} MF = ed(M, \mathcal{D}) &\iff r = e|X + \alpha| = e|r \cos \theta + \alpha| \\ &\iff r = \pm e(r \cos \theta + \alpha) \\ &\iff (1 - e \cos \theta)r = e\alpha \text{ ou } (1 + e \cos \theta)r = -e\alpha \\ &\iff r = \frac{p}{(1 - e \cos \theta)} \text{ ou } r = -\frac{p}{(1 + e \cos \theta)} \end{aligned}$$

et comme (r, θ) et $(-r, \theta + \pi)$ sont des couples de coordonnées polaires d'un même point, les deux équations polaires :

$$r = \frac{p}{(1 - e \cos \theta)} \text{ ou } r = -\frac{p}{(1 + e \cos \theta)}$$

sont les mêmes et on en déduit qu'une équation polaire suivant l'axe polaire (F, \vec{i}) de la conique se met sous la forme :

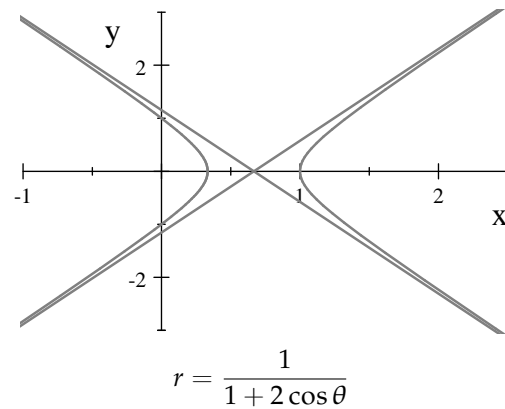
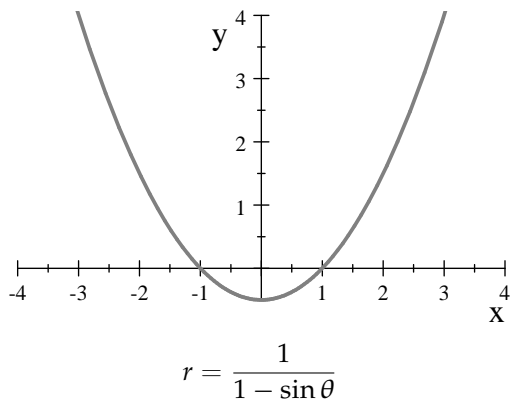
$$r = \frac{p}{(1 - e \cos \theta)} \tag{I.2}$$

Suivant un axe polaire (F, \vec{u}) , F étant toujours un foyer de la conique, l'équation polaire est :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\theta - \theta_0)}$$

où θ_0 est l'angle polaire de l'axe focal.

Exemples La courbe d'équation $r = \frac{1}{1 - \sin \theta}$ est une parabole, celle d'équation $r = \frac{1}{1 + 2 \cos \theta}$ est une hyperbole.



I.2 Parabole ($e = 1$)

L'équation (I.1) s'écrit

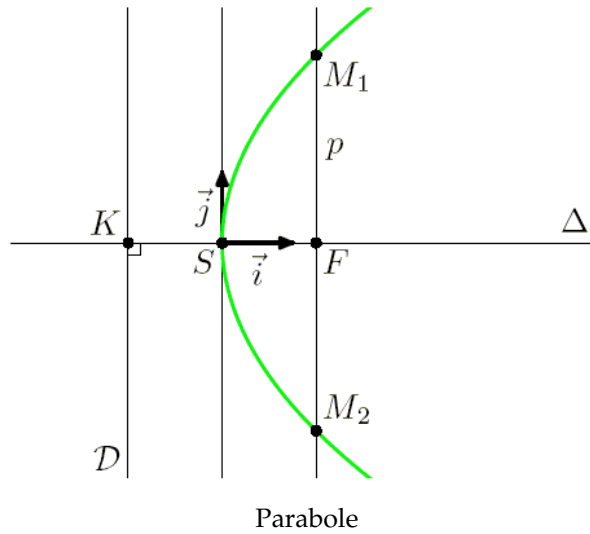
$$Y^2 - 2pX - p^2 = 0 \text{ ou bien } Y^2 = 2p \left(X + \frac{p}{2} \right)$$

Le point $S(-p/2, 0)$ est appelé **sommet** de la parabole et dans le repère orthonormé (S, \vec{i}, \vec{j}) , l'équation cartésienne de la parabole est :

$$y^2 = 2px \tag{I.3}$$

Un paramétrage admissible est alors :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2p} t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$



I.3 Ellipse ($e < 1$)

Dans ce cas l'équation (I.1) s'écrit

$$X^2 + \frac{Y^2}{(1 - e^2)} - \frac{2epX}{(1 - e^2)} = \frac{p^2}{(1 - e^2)}$$

Comme $e < 1$, on pose $a = \frac{p}{1 - e^2}$ et $b = a\sqrt{1 - e^2}$ ($b < a$), et l'équation s'écrit

$$X^2 - 2eaX + e^2a^2 + \frac{Y^2}{(1 - e^2)} = e^2a^2 + (1 - e^2)a^2 = a^2$$

ou bien

$$\frac{(X - ea)^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

Si on pose $c = ea$ de sorte que $a^2 = b^2 + c^2$, $x = X - ea$ et $y = Y$ c'est à dire qu'on se place dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) où $\vec{OF} = c\vec{i}$, l'équation s'écrit

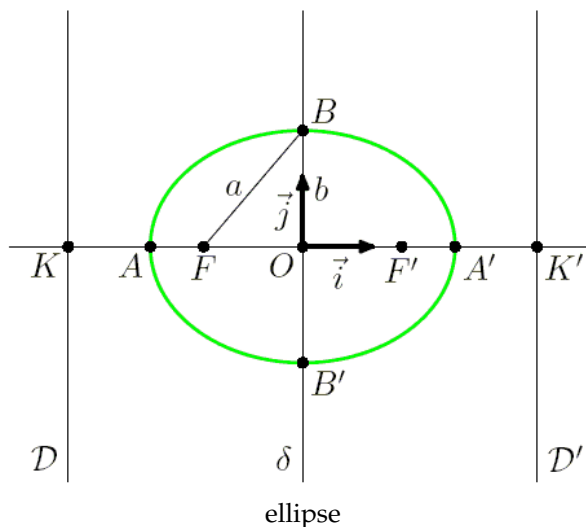
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

appelée **équation réduite** de l'ellipse.

Le point O est le **centre**, les points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ sont les **sommets** de l'ellipse, $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ sont les deux foyers associés respectivement aux directrices $\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}' : x = -\frac{a^2}{c}$. L'axe (Ox) est le **grand axe** et (Oy) le **petit axe**. La grandeur $OA = OA' = a$ est le **demi-grand axe**. Les intersections de l'ellipse avec l'axe non focal sont $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$ (sommets secondaires de l'ellipse), la grandeur $OB = OB' = b$ est le **demi-petit axe**.

La définition **bifocale** est :

$$MF + MF' = 2a.$$



L'ellipse admet alors le paramétrage :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi[$$

I.4 Hyperbole ($e > 1$)

Dans ce cas l'équation (I.1) s'écrit

$$X^2 - \frac{Y^2}{(e^2 - 1)} + \frac{2epX}{(e^2 - 1)} = -\frac{p^2}{(e^2 - 1)}$$

Comme $e > 1$, on pose $a = \frac{p}{e^2 - 1}$ et $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ ($b < a$), et l'équation s'écrit

$$X^2 + 2eaX + e^2a^2 - \frac{Y^2}{(e^2 - 1)} = e^2a^2 - (e^2 - 1)a^2 = a^2$$

ou bien

$$\frac{(X + ea)^2}{a^2} - \frac{Y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$$

Si on pose $c = ea$ de sorte que $c^2 = a^2 + b^2$, $x = X + ea$ et $y = Y$ c'est à dire qu'on se place dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) où $\vec{OF} = c\vec{i}$, l'équation s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

appelée **équation réduite** de l'hyperbole.

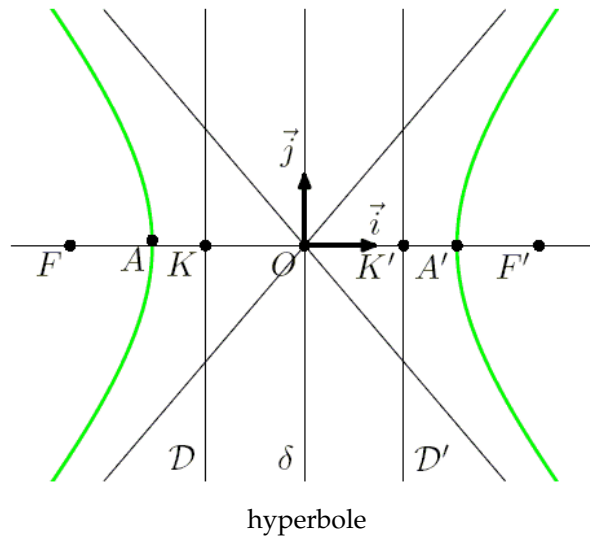
Les points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ sont les **sommets** de l'hyperbole, $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ sont les deux foyers associés respectivement aux directrices $\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}' : x = -\frac{a^2}{c}$. L'axe (Ox) est l'**axe focal** et (Oy) l'axe non focal. Ses asymptotes ont pour équations :

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ et } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

Et la définition **bifocale** d'une hyperbole :

$$|MF - MF'| = 2a.$$

Si les asymptotes sont perpendiculaires ($e = \sqrt{2}$, $a = b$) l'hyperbole est **équilatère**.



Enfin une hyperbole admet le paramétrage :

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

II Compléments

II.1 Équation des tangentes

L'équation de la tangente au point (x_0, y_0) des différentes coniques rapportées à leur repère propre se retrouve à l'aide de la règle du dédoublement :

- Parabole $2px = y^2$, tangente : $p(x + x_0) = yy_0$
- Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tangente : $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.
- Hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, tangente : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Exemple La tangente à l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 1$ au point de coordonnées $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a pour équation : $x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$.

II.2 Lois de Kepler

Avant que Newton n'ait énoncé ses lois du mouvement, Kepler, avait énoncé ses trois lois sur le mouvement des planètes :

- 1- Loi de la trajectoire :** Les planètes ont des orbites elliptiques dont le soleil est l'un des foyers.
- 2- Loi des aires :** Le rayon vecteur tracé du Soleil à la planète balaye des aires proportionnelles aux temps mis pour les balayer.
- 3- Loi des périodes de révolution :** Les carrés des périodes de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.

Un peu de cinématique

Un mouvement ponctuel est dit à accélération centrale s'il existe un point fixe O tel que, pour tout t , le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}$ sont colinéaires.

- (1) Montrer qu'un mouvement ponctuel est à accélération centrale si et seulement s'il existe O fixe tel que $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ est constant (où $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$ est le vecteur vitesse).
- (2) Montrer qu'un mouvement ponctuel à accélération centrale est soit rectiligne, soit plan. Montrer que dans le deuxième cas, la trajectoire ne passe pas par le centre O et que la vitesse ne s'annule pas.
- (3) **Loi des aires** : Soit un mouvement ponctuel dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) défini par : $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}_{\theta(t)}$, $t \in I$.

Montrer qu'il s'agit d'un mouvement à accélération centrale de centre O si et seulement si :

$$\forall t \in I : r^2 \frac{d\theta}{dt} = C;$$

où C est une constante dite constante des aires.

Résumé

Parabole

Equation réduite	Foyer	Directrice	Tangente au point (x_0, y_0) de la parabole
$y^2 = 2px$	$(\frac{p}{2}, 0)$	$x = -\frac{p}{2}$	$y_0y = p(x + x_0)$ Le centre étant l'origine du repère

Ellipse

Equation réduite	Excentricité	Foyers	Directrices	Tangente au point (x_0, y_0) de l'ellipse
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b > 0$	$e = \frac{c}{a}$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$(\pm c, 0)$	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ Le centre étant l'origine du repère

Définition bifocale $MF + MF' = 2a, a > 0$

On pose $c = \frac{1}{2}FF'$, et on a les cas :

- Si $a < c$ l'ensemble $\{M \mid MF + MF' = 2a\}$ est vide.
- Si $a = c$ l'ensemble $\{M \mid MF + MF' = 2a\}$ est le segment $[F, F']$.
- Si $a > c$ l'ensemble $\{M \mid MF + MF' = 2a\}$ est l'ellipse de foyers F et F' , d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ et de centre le milieu Ω de $[F, F']$. Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ o.n.d de sorte que $\vec{i} = \frac{1}{c}\vec{\Omega F}$ les directrices sont les droites d'équations : $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{a}{e}$.

Hyperbole

Equation réduite	Excentricité	Foyers	Directrices	Asymptotes	Tangente au point (x_0, y_0) de l'hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > 0, b > 0$	$e = \frac{c}{a}$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$(\pm c, 0)$	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ Le centre étant l'origine du repère

Définition bifocale $|MF - MF'| = 2a, a > 0$

On pose $c = \frac{1}{2}FF'$, et on a les cas :

- Si $a > c$ l'ensemble $\{M \mid |MF - MF'| = 2a\}$ est vide.
- Si $a = c$ l'ensemble $\{M \mid |MF - MF'| = 2a\}$ est la droite (FF') privé du segment $[F, F']$.
- Si $a < c$ l'ensemble $\{M \mid |MF - MF'| = 2a\}$ est l'hyperbole de foyers F et F' , d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ et de centre le milieu Ω de $[F, F']$. Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ o.n.d de sorte que $\vec{i} = \frac{1}{c}\vec{\Omega F}$ les directrices sont les droites d'équations : $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{a}{e}$.