

# Courbes planes paramétrées

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes</b>	<b>1</b>
I.1	Définitions – Exemples . . . . .	1
I.2	Etude local d'un arc paramétré . . . . .	2
I.3	Branches infinies . . . . .	5
I.4	Plan d'étude . . . . .	6
<b>II</b>	<b>Courbes en polaire</b>	<b>8</b>
II.1	Coordonnées polaires . . . . .	8
II.2	Exemples . . . . .	8
II.3	Etude locale . . . . .	9
II.4	Concavité . . . . .	9
II.5	Branches infinies . . . . .	11
II.6	Plan d'étude . . . . .	11
<b>III</b>	<b>Etude métrique des courbes planes</b>	<b>12</b>
III.1	Longueur d'une courbe . . . . .	12
III.2	Abscisse curviligne . . . . .	12
III.3	Repère de Frénet . . . . .	13
III.4	Courbure, rayon de courbure, centre de courbure . . . . .	14

# I Courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes

Dans toute la suite, on considère le plan affine euclidien  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$  qu'on identifie à  $\mathbb{C}$ , muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . Tout point du plan sera représenté par ses coordonnées  $(x, y)$  dans ce repère ou par son affixe  $z = x + iy$ .

## I.1 Définitions – Exemples

**Définition I.1** Un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), est la donnée d'un couple  $(I, f)$ , avec  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  et

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2; t \longmapsto (x(t), y(t))$$

de classe  $\mathcal{C}^k$ , i.e.  $x$  et  $y$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ .

L'ensemble  $\Gamma = \{M(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$  est appelé image ou support de l'arc. Souvent on confond l'arc avec son support et on dit que  $\Gamma$  est un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^k$ .

### Exemples

(1) **Droite**, passant par  $A(x_0, y_0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(2) **Cercle**, de centre  $\Omega(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$ :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R \cos t \\ y(t) = y_0 + R \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(3) **Cycloïde**, d'amplitude  $R$ :

$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \sin \theta) \\ y(\theta) = R(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R},$$

c'est la trajectoire d'un point d'un cercle de rayon  $R$  qui roule sans glisser le long d'une droite. (Retrouver cette équation à l'aide des lois de la cinématique).

### Interprétation cinématique

Si le point  $M(t)$  de coordonnées  $f(t)$  désigne la position d'un mobile (à l'instant  $t$ ).

- Le support  $\Gamma$  de l'arc désigne alors la trajectoire du mobile,

- $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{f}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$  la vitesse du mobile et

- $\vec{\gamma}(t) = \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}$  son accélération.

### Changement de paramètre admissible

**Définition I.2** Soient  $\Gamma : (I, f)$  un arc paramétré de classe  $k \geq 1$ ,  $J$  intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\theta : J \longrightarrow I$  de classe  $\mathcal{C}^k$ . On dit que  $\theta$  est un changement de paramètre admissible de  $\Gamma$  si  $\theta'$  ne s'annule pas sur  $J$  (i.e.  $\theta$  est strictement monotone et donc bijective). Dans ce cas l'arc  $(J, g = f \circ \theta)$  admet le même support  $\Gamma$  et on dit que  $(J, g)$  est un paramétrage admissible de  $\Gamma$  et que  $(I, f)$  et  $(J, g)$  sont équivalents.

Si  $\theta$  est strictement croissante les arcs ont même orientation.

### Exemples

(1) Pour la droite passant par  $A(x_0, y_0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + a(2t - 1) \\ y(t) = y_0 + b(2t - 1) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

sont deux paramétrages de la droite,  $\theta: J?$

(2) Pour le cercle de centre  $\Omega(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$  :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R \cos t \\ y(t) = y_0 + R \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + R \sin t \\ y(t) = y_0 + R \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

sont deux paramétrages du cercle,  $\theta$ ?

**Points multiples**

**Définition I.3** On dit que le point  $M(t_1) \in \Gamma$  est multiple (double, triple, ...), s'il existe  $t_2 \neq t_1$  ( $t_2, t_3, \dots$ ) deux à deux distincts tels que  $f(t_1) = f(t_2) = \dots$ . Un point qui n'est pas multiple est dit simple. On dit que l'arc  $\Gamma$  est simple si tous ses points son simples.

**Exemple I.1** Dans l'arc

$$\begin{cases} x(t) = t^2(t - 1) \\ y(t) = (t^2 - 1) \ln(t^2 + 1) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

le point  $O(0,0)$  est double.

**Points réguliers**

**Définition I.4** On dit que le point  $M(t) \in \Gamma$  est régulier si  $\overrightarrow{M'(t)} \neq \vec{0}$ , si non on dit que le point est stationnaire. Si tous les points sont réguliers, on dit que l'arc est régulier.

**Exemples**

(1) Le cercle

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

est régulier.

(2) Dans l'arc

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

le point  $O(0,0)$  est le seul point stationnaire.

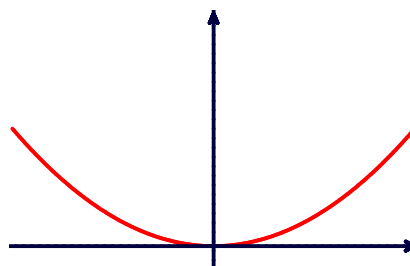
**I.2 Etude local d'un arc paramétré**

Soit  $\Gamma : (I, f)$  un arc de classe  $C^k$ ,  $k$  assez grand, et  $t_0 \in I$ . La formule de Taylor-Young au point  $t_0$  donne :

$$f(t) = M(t_0) + (t - t_0)\overrightarrow{f'(t_0)} + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\overrightarrow{f''(t_0)} + (t - t_0)^2\overrightarrow{\varepsilon(t)}$$

avec  $\lim_{t \rightarrow t_0} \overrightarrow{\varepsilon(t)} = (0,0)$ .

Donc si la famille  $(\overrightarrow{f'(t_0)}, \overrightarrow{f''(t_0)})$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^2$ , au voisinage du point  $M(t_0)$ , la courbe est tangente à la droite passant par  $M(t_0)$  et de vecteur directeur  $\overrightarrow{f'(t_0)}$ . En plus, dans le repère local  $(M(t_0), \overrightarrow{f'(t_0)}, \overrightarrow{f''(t_0)})$  l'ordonnée de  $M(t)$  suivant  $\overrightarrow{f''(t_0)}$  est positive. Ce qui donne l'allure ordinaire suivante :



dans ce cas on dit que le point  $M(t_0)$  est birégulier.

En général la formule de Taylor s'écrit :

$$M(t) = M(t_0) + \sum_{n=1}^k \frac{(t-t_0)^n}{n!} \overrightarrow{f^{(n)}(t_0)} + (t-t_0)^n \overrightarrow{\varepsilon(t)} \quad (\text{I.1})$$

### Entiers caractéristiques

Si on pose :

$$p = \min \left\{ n \in \mathbf{N}^* \mid \overrightarrow{f^{(n)}(t_0)} \neq \vec{0} \right\} \quad \text{et} \quad q = \min \left\{ n \in \mathbf{N}^* \mid \left( \overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}, \overrightarrow{f^{(n)}(t_0)} \right) \text{ libre} \right\}$$

alors  $\left( M(t_0), \overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}, \overrightarrow{f^{(q)}(t_0)} \right)$  est un repère cartésien (repère local), et la formule de Taylor (I.1) s'écrit :

$$M(t) = M(t_0) + \left( \sum_{n=p}^{q-1} \lambda_n \frac{(t-t_0)^n}{n!} \right) \overrightarrow{f^{(p)}(t_0)} + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \overrightarrow{f^{(q)}(t_0)} + (t-t_0)^q \overrightarrow{\varepsilon(t)} \quad (\text{I.2})$$

où  $\lambda_n$  est tel que  $\overrightarrow{f^{(n)}(t_0)} = \lambda_n \overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}$  pour  $n \in [p, q-1]$ .

Les entiers  $p$  et  $q$  sont alors appelés entiers caractéristiques du point  $M(t_0)$ .

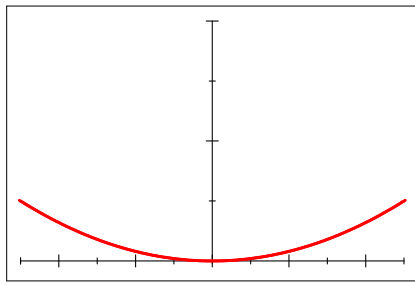
### Tangente en un point

La droite  $\mathcal{T}_{t_0}$  passant par  $M(t_0)$  et de vecteur directeur  $\overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}$  est appelé la tangente de  $\Gamma$  au point  $M(t_0)$  et son équation cartésienne est :

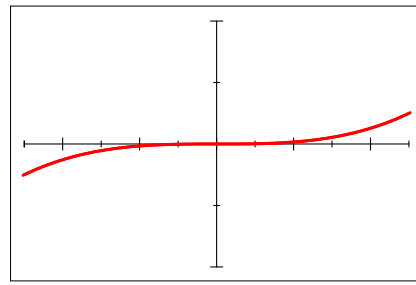
$$\mathcal{T}_{t_0} : y^{(p)}(t_0)(x - x_0) = x^{(p)}(t_0)(y - y_0).$$

### Allure au voisinage d'un point

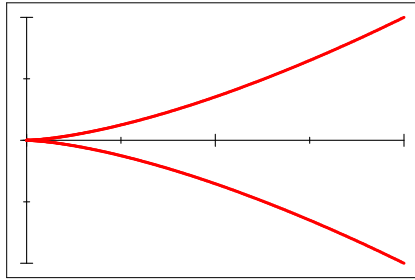
Si on pose  $\vec{v} = \overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{f^{(q)}(t_0)}$  le repère  $(M(t_0), \vec{v}, \vec{w})$  est appelé repère mobile ou local au point  $M(t_0)$  et la formule de Taylor (I.2) donne l'allure de  $\Gamma$  au voisinage de  $M(t_0)$ . On peut alors distinguer les quatre cas de figure :



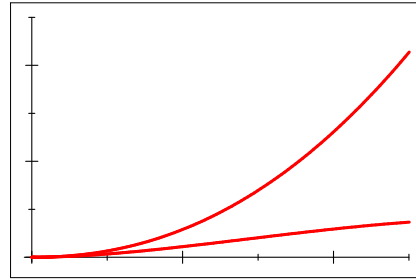
Point ordinaire:  $p$  impair et  $q$  pair



Point d'inflexion:  $p$  impair et  $q$  impair



Point de rebroussement de première espèce:  
 $p$  pair et  $q$  impair



Point de rebroussement de deuxième espèce:  
 $p$  pair et  $q$  pair

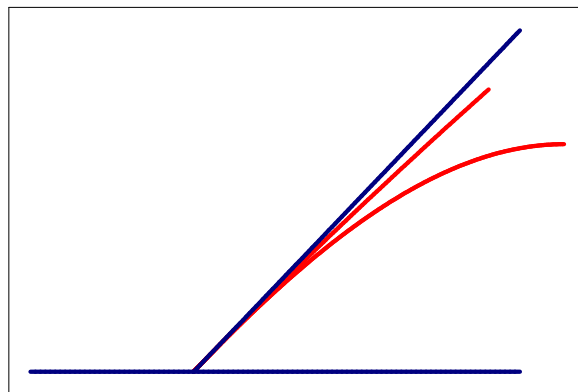
**Exemple I.2** On considère la courbe

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = e^t - t - 1 \\ y(t) = (t + 1)(t^2 + 2t - 2) \end{cases} \text{ en } t_0 = 0.$$

On a  $(t + 1)(t^2 + 2t - 2) = 3t^2 + t^3 - 2$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + O(t^5) \\ y(t) = -2 + 3t^2 + t^3 \end{cases}$$

on vérifie facilement que  $p = 2$ ,  $\vec{v} = (1, 6)$  et  $q = 4$ ,  $\vec{w} = (1, 0)$ . Le point  $M(0, -2)$  est un point de rebroussement de deuxième espèce.



**Remarque I.1** Pour orienter l'arc au sens des  $t$  croissant on étudie le vecteur  $\overrightarrow{M(-t)M(t)}$  dans ce cas, et en général le vecteur  $\overrightarrow{M(t_0 - t)M(t_0 + t)}$ , quand  $t$  tend vers 0.

Dans notre cas on a :

$$\begin{cases} x(t) - x(-t) = \frac{1}{3}t^3 + O(t^5) \\ y(t) - y(-t) = 2t^3 \end{cases}$$

donc  $\overrightarrow{M(-t)M(t)} = \frac{1}{3}t^3\vec{v} + O(t^5)$ ,  $t$  étant positif donc le vecteur  $\overrightarrow{M(-t)M(t)}$  admet le même sens que  $\vec{v}$  pour  $t$  assez petit, ce qui veut dire que le parcours des  $t$  croissant est du bas vers le haut.

### I.3 Branches infinies

**Définition I.5** On dit que l'arc  $\Gamma : (x(t), y(t))$  admet une branche infinie en  $t_0 \in \bar{I}$  si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{OM(t)}\| = +\infty$$

ce qui veut dire que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty.$$

**Définition I.6** Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{OM(t)}\| = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{OM(t)}}{\|\overrightarrow{OM(t)}\|} = \vec{u}_0 = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$  (un vecteur ne dépendant donc pas de  $t$ ), ce qui veut dire que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t)}{\|\overrightarrow{OM(t)}\|} = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{\|\overrightarrow{OM(t)}\|} = \beta,$$

on dit que la courbe admet la droite  $\mathbb{R}\vec{u}_0$  comme direction asymptotique.

**Définition I.7** Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{OM(t)}\| = +\infty$  et s'il existe une droite affine  $\mathcal{D}$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} d(M(t), \mathcal{D}) = 0$$

on dit que la droite  $\mathcal{D}$  est asymptôte à  $\Gamma$  quand  $t$  tend vers  $t_0$ .

**Remarque I.2** Si  $\mathcal{D}$  a pour équation

$$ax + by + c = 0$$

alors  $\mathcal{D}$  est asymptôte à la courbe si et ssi

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |ax(t) + by(t) + c| = 0.$$

Et la position relative de  $\Gamma$  et  $\mathcal{D}$  est donnée par le signe de  $ax(t) + by(t) + c$  autour de  $t_0$ .

#### Détermination pratique des branches infinies :

- (1) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b$  alors  $\mathcal{D} : y = b$ .
- (2) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$  alors  $\mathcal{D} : x = a$ .
- (3) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$  alors  $\Gamma$  admet une BPDA l'axe  $\mathbb{R}\vec{i}$ .
- (4) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$  alors  $\Gamma$  admet une BPDA l'axe  $\mathbb{R}\vec{j}$ .
- (5) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t)) = \pm\infty$  alors  $\Gamma$  admet une BPDA la droite ( $y = ax$ ).
- (6) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t)) = b$  alors  $\Gamma$  admet la droite ( $y = ax + b$ ) comme asymptôte.

**Exemple I.3** Etude des branches infinies de l'arc :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t}{\ln t} \\ y(t) = \frac{t}{t-1} \end{cases} \quad t \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[.$$

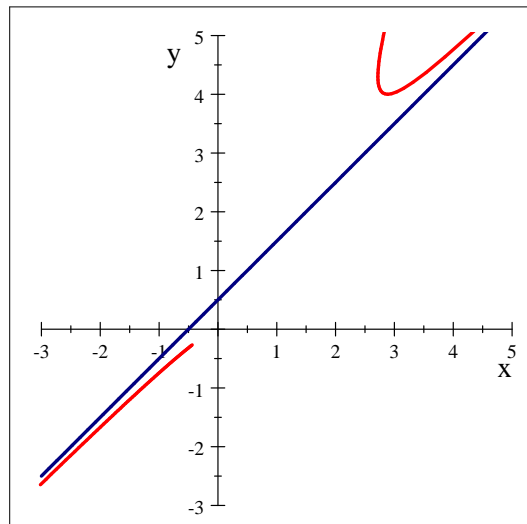
on a  $\lim_{t \rightarrow 1^\pm} x(t) = \lim_{t \rightarrow 1^\pm} y(t) = \pm\infty$ , de même  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$ , donc la courbe présente des B.I en  $t = 1$  et  $t = +\infty$ .

$t \rightarrow 1$  : On a

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t-1} + \frac{3}{2} + \frac{5}{12}(t-1) + O((t-1)^2) \\ y(t) = \frac{1}{t-1} + 2 + (t-1) + O((t-1)^2) \end{cases} \quad t \rightarrow 1,$$

donc  $y(t) - x(t) = \frac{1}{2} + \frac{7}{12}(t-1) + O((t-1)^2)$ . Ce qui permet de voir que la droite  $(y - x = \frac{1}{2})$  est asymptote et en plus que  $\Gamma$  est au dessous ou au dessus de cette droite suivant le signe de  $(t-1)$ .

$t \rightarrow +\infty$  : On a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 \ln t}{t(t-1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$  donc  $\Gamma$  admet une BPDI l'axe  $\mathbb{R}j^z$ , d'où l'allure suivante :



## I.4 Plan d'étude

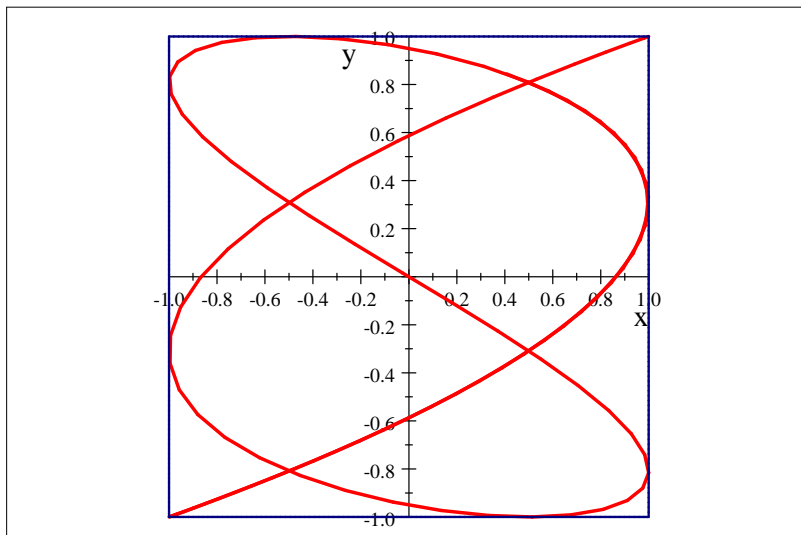
Pour construire une courbe  $\Gamma$  donnée par un paramétrage  $(x(t), y(t))$ , on suit les étapes suivantes :

- Déterminer les domaines de définition de  $x$  et  $y$ . On ne peut donc étudier les deux fonctions que sur l'intersection des deux domaines qu'on écrit si nécessaire comme union d'intervalles.
- Déterminer le domaine d'étude en étudiant parité, périodicité et d'éventuelles relations de symétries entre  $x$  et  $y$ .
- Etudier les variations de  $x$  et  $y$  et représenter leurs variations communes dans un tableau.
- Etudier les branches infinies s'il y en a.
- Etudier l'allure de  $\Gamma$  aux voisinage de points particuliers.
- Tracer l'allure de  $\Gamma$ .

**Exemple I.4** En suivant les étapes précédentes, étudier et tracer l'arc :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \cos \frac{3t}{5} \end{cases}$$

on trouvera la courbe suivante, on précisera les tangentes aux points remarquables :



**Exercice I.1** On considère la courbe  $\Gamma$  du plan définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

- (1) Etudier les variations de  $x(t)$  et  $y(t)$  et dresser les dans un même tableau.
- (2) Déterminer les points stationnaires de  $\Gamma$  ainsi que leurs natures.
- (3) Etudier les branches infinies de  $\Gamma$  et sa position par rapport à la droite  $\Delta$  d'équation :

$$y = x - \ln(2)$$

Etudier l'intersection éventuelle de  $\Gamma$  et  $\Delta$ .

- (4) Tracer la courbe  $\Gamma$  et ses asymptotes dans le repère  $\mathcal{R}$  (*unité = 1cm*).

**Exercice I.2** Soit  $\Gamma$  la courbe paramétrée définie, dans un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan affine Euclidien, par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

- (1) Etudier les variations de  $x$  et  $y$  et dresser les dans un même tableau.
- (2) Déterminer l'équation de l'asymptote à  $\Gamma$  ( $t \rightarrow -1$ ) et donner leurs positions relatives.
- (3) Pour  $|t|$  assez grand, on pose

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} \text{ où } \vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{r}(t) = \vec{j}$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{r}(t) = -\vec{j}$ , et en déduire les demi-tangentes à l'origine respectivement lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  et  $-\infty$ .

- (4) Construire la courbe  $\Gamma$  dans le repère  $\mathcal{R}$  (*unité 2cm*).
- (5) Soit  $D$  une droite d'équation:  $ax + by + c = 0$ .
  - (i) Montrer que l'équation, en  $t$ ,  $ax(t) + by(t) + c = 0$ , possède au plus trois racines.
  - (ii) En déduire que  $D$  coupe  $\Gamma$  en au plus 3 points.

## II Courbes en polaire

### II.1 Coordonnées polaires

**Définition II.1** Pour tout point  $M \neq O(0,0)$  du plan, il existe un couple  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$  tel que

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) \text{ où } \vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}.$$

Le couples  $(r, \theta)$  est appelé couple de coordonnées polaires de  $M$  et en général tous les couples  $(r, \theta + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sont appelés ainsi.

Donc un arc paramétré peut aussi être défini à l'aide des coordonnées polaires :

$$\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}(\theta(t)) \right\}$$

où  $r$  et  $\theta$  sont des fonctions d'un paramètre  $t$ .

Le cas général sort du cadre du programme de la MPSI, seul le cas où  $\theta = t$  (i.e.  $\theta$  est le paramètre). Dans ce cas  $\Gamma$  est définie par une relation du type :

$$\Gamma : r = r(\theta) \text{ avec } r \text{ de signe quelconque,}$$

dans le cas  $r < 0$  le couple de coordonnées polaires est en fait  $(-r, \theta + \pi)$  et si  $r = 0$  il s'agira de l'origine du repère.

### II.2 Exemples

**Droite passant par l'origine :** Une droite passant par l'origine, en polaire, est définie par l'angle (constant) qu'elle fait avec l'axe  $\mathbb{R}\vec{i}$  :

$$\mathcal{D} : \theta = \theta_0 \quad \theta_0 = \left( \widehat{\vec{i}, \vec{v}} \right) \text{ où } \mathcal{D} = O + \mathbb{R}\vec{v}.$$

**Droite ne passant pas par l'origine :** Si on note  $\vec{n} = \cos\theta_0\vec{i} + \sin\theta_0\vec{j}$  le vecteur normal à la droite  $\mathcal{D}$ , son équation cartésienne s'écrit :

$$\mathcal{D} : (\cos\theta_0)x + (\sin\theta_0)y = a, \quad a \in \mathbb{R},$$

donc pour tout point  $M(r, \theta)$  de  $\mathcal{D}$ , on a

$$a = (\cos\theta_0)r\cos\theta + (\sin\theta_0)r\sin\theta = r\cos(\theta - \theta_0)$$

et par conséquent l'équation polaire de  $\mathcal{D}$  est :

$$\mathcal{D} : r = \frac{a}{\cos(\theta - \theta_0)} \text{ avec } -\frac{\pi}{2} < \theta - \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

**Cercle de centre l'origine :** Un cercle  $\mathcal{C}(O, R)$  de centre l'origine, en polaire, est défini par son rayon  $R$  (constant) :

$$\mathcal{C}(O, R) : r = R.$$

**Cercle passant par l'origine :** Un cercle qui passe par l'origine admet une équation cartésienne de la forme :

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0 \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ et son rayon } R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

donc pour tout point  $M(r, \theta)$  de  $\mathcal{C}$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta + 2ar\cos\theta + 2br\sin\theta \\ &= r^2 + 2rR \left( \frac{a}{R} \cos\theta + \frac{b}{R} \sin\theta \right) \\ &= r^2 + 2rR \cos(\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

où  $\theta_0$  est tel que  $\cos\theta_0 = \frac{a}{R}$  et  $\sin\theta_0 = \frac{b}{R}$ . Par conséquent l'équation polaire de  $\mathcal{C}$  est :

$$\mathcal{D} : r = a \cos(\theta - \theta_0) \text{ où on a posé } a = -2R.$$

**Cercle passant par l'origine :** Si un cercle ne passe pas par l'origine, il n'admet pas d'équation polaire simple.

**Exercice II.1** Equations des différents coniques en polaire ?

### II.3 Etude locale

Soit un arc  $\Gamma$  donné par la relation  $r = r(\theta)$  où  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$   $k$  assez grand. On a donc

$$\overrightarrow{OM(\theta)} = r(\theta)\vec{u}(\theta).$$

Remarquons que  $\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  est une fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une fonction de classe  $C^\infty$  et

$$\frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \text{ qu'on notera simplement } \vec{u}'(\theta),$$

et que  $(\vec{u}(\theta), \vec{u}'(\theta))$  est une base orthonormée directe. Le repère orthonormé direct  $(M(\theta), \vec{u}(\theta), \vec{u}'(\theta))$  est appelé repère mobil (ou local).

Donc

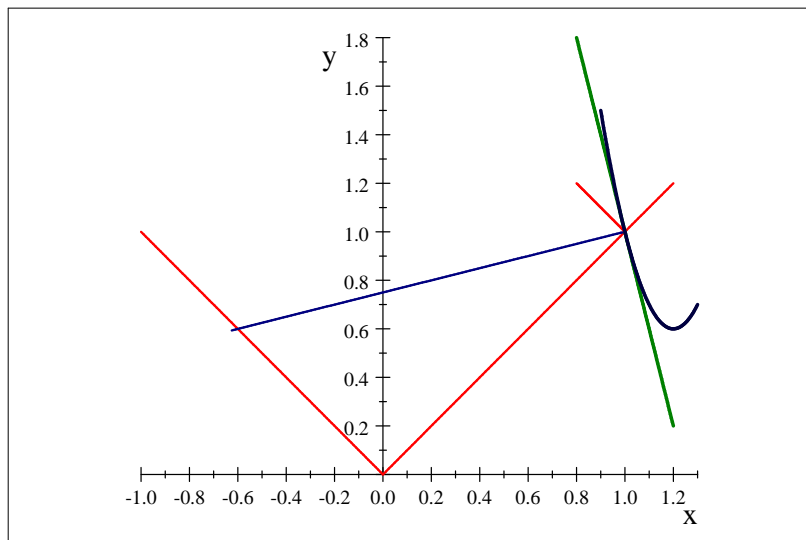
$$\frac{d\overrightarrow{OM(\theta)}}{d\theta} = r'(\theta)\vec{u}(\theta) + r(\theta)\vec{u}'(\theta).$$

**Remarque II.1** Par conséquent le seul point stationnaire éventuel est l'origine  $O(0,0)$  dans le cas :

$$r(\theta) = r'(\theta) = 0.$$

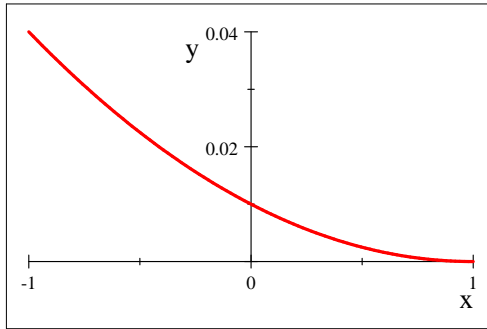
**Tracé de la tangente en un point régulier** Soit  $M(\theta_0)$  un point régulier de  $\Gamma$ , il s'agit de tracer le vecteur  $r'(\theta_0)\vec{u}(\theta_0) + r(\theta_0)\vec{u}'(\theta_0)$  au point  $M(\theta_0)$ . Pour profiter de la connaissance de la "longueur"  $r$ , on procède de la façon suivante :

- Tracer la normale à  $\overrightarrow{OM}$  passant par  $O(0,0)$  et on l'oriente par  $\vec{u}'(\theta_0)$ .
- Sur cette normale on considère le point  $N$  d'abscisse  $r'(\theta)$ .
- La tangente est alors la perpendiculaire à la droite  $(NM)$  passant par  $M$ .

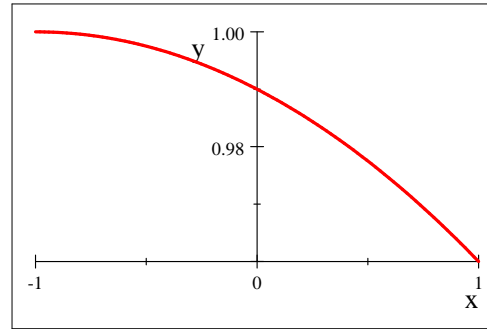


### II.4 Concavité

La concavité d'une courbe en polaire est définie relativement à l'origine du repère. On distingue donc deux cas :



L'origine n'est pas dans la concavité



L'origine est dans la concavité

**Détermination de la concavité en un point différent de l'origine :** Soit  $M(\theta) \neq O(0,0)$  un point de  $\Gamma$ ,  $M$  est donc un point régulier et par conséquent c'est soit un point ordinaire ou un point d'inflexion. on pose :

$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}(\theta)}{d\theta} = r'(\theta)\vec{u}(\theta) + r(\theta)\vec{u}'(\theta) \text{ et}$$

$$\vec{N} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(\theta)}{d\theta^2} = (r''(\theta) - r(\theta))\vec{u}(\theta) + 2r'(\theta)\vec{u}'(\theta)$$

pour connaître si le point  $O$  est dans la concavité ou non on calcule le signe du déterminant

$$[\vec{T}, \overrightarrow{MO}] = [\overrightarrow{OM}, \vec{T}] = \begin{vmatrix} r & r' \\ 0 & r \end{vmatrix} = r^2 > 0$$

donc  $(\vec{T}, \overrightarrow{MO})$  est une base directe. D'autre part

$$[\vec{T}, \vec{N}] = \begin{vmatrix} r' & r'' - r \\ r & 2r' \end{vmatrix} = r^2 + 2r'^2 - rr''.$$

On distingue alors trois cas de figure.

**Premier cas :**  $r^2 + 2r'^2 - rr'' > 0$ . Alors  $(\vec{T}, \vec{N})$  est directe, ce qui veut dire que le point  $O$  est dans la concavité.

**Deuxième cas :**  $r^2 + 2r'^2 - rr'' < 0$ . Alors  $(\vec{T}, \vec{N})$  est indirecte, ce qui veut dire que le point  $O$  n'est pas dans la concavité.

**Troisième cas :**  $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$ . Le point  $M$  est un point d'inflexion si la quantité  $r^2 + 2r'^2 - rr''$  s'annule en changeant de signe.

**Remarque II.2** Avec  $q = \frac{1}{r}$  on a :  $q'' = \frac{2r'^2 - r''r}{r^3}$  donc

$$q'' + q = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^3}$$

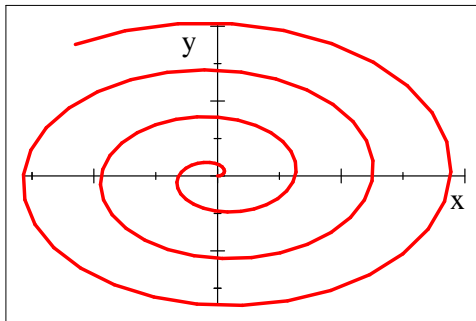
donc si  $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$  sur un intervalle  $J$  alors  $q = a \cos(\theta - \theta_0)$  et donc  $r = \frac{a}{\cos(\theta - \theta_0)}$  est un segment de droite au voisinage du point  $M$ .

**Remarque II.3** Si l'origine  $O(0,0)$  est un point stationnaire l'étude local est donné par le signe de  $r$  autour de  $O$ .

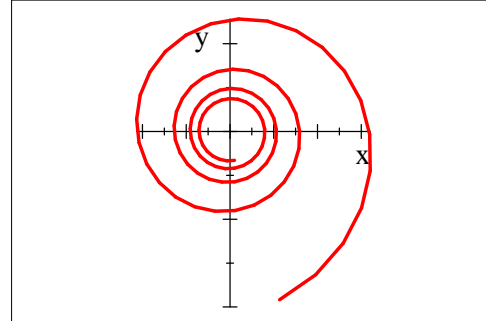
### II.5 Branches infinies

Cas de direction asymptotique...

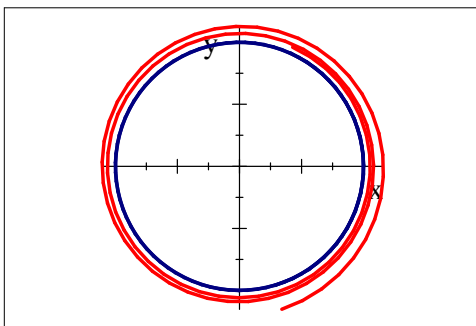
On cite les différents cas de figure, en plus des branches paraboliques et asymptôtes :



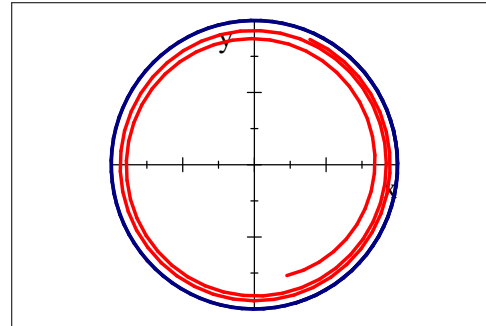
Branche spirale sortante:  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} r(\theta) = \infty$



Branche spirale entrante:  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} r(\theta) = 0$



Cercle asymptôte:  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} r(\theta) = a^+$



Cercle asymptôte:  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} r(\theta) = a^+$

### II.6 Plan d'étude

Pour construire une courbe  $\Gamma$  donnée par un paramétrage  $r(\theta)$  en polaire, on suit les étapes suivantes :

- Déterminer les domaines de définition de  $r$ .
- Déterminer le domaine d'étude en étudiant parité, périodicité et d'éventuelles relations de symétries. On résume les symétries dans le tableau suivant :

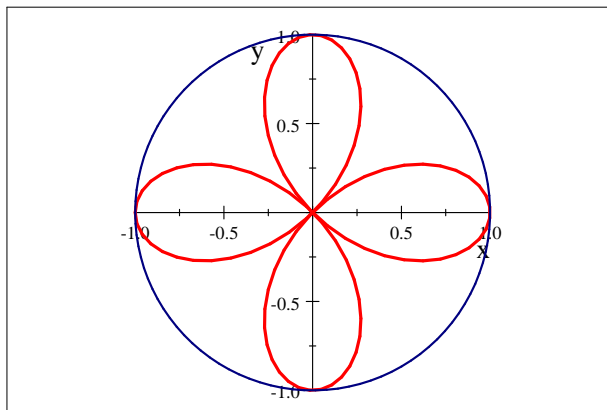
Relation	Symétrie par l'isométrie
$r(\theta) = r(\theta + \alpha)$	Rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha$
$r(\theta) = r(-\theta)$	Symétrie axiale d'axe $(Ox)$
$r(\theta) = -r(\pi - \theta)$	Symétrie axiale d'axe $(Ox)$
$r(\theta) = -r(-\theta)$	Symétrie axiale d'axe $(Oy)$
$r(\theta) = r(\pi - \theta)$	Symétrie axiale d'axe $(Oy)$
$r(\theta) = r(2\alpha - \theta)$	Symétrie axiale d'axe $O + \mathbb{R}\vec{u}(\alpha)$

- Etudier les variations et le **signe** de  $r$  et les représenter dans un tableau.
- Déterminer les tangentes et la concavité aux points particuliers.
- Tracer l'allure de  $\Gamma$ .

**Exemple II.1** En suivant les étapes précédentes, étudier et tracer l'arc :

$$\Gamma : r = r(t) = \cos 2t$$

on trouvera la courbe suivante, on précisera les tangentes aux points remarquables :



### III Etude métrique des courbes planes

#### III.1 Longueur d'une courbe

**Définition III.1** On appelle longueur de l'arc paramétré  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{C}$ ) de classe  $C^1$ , défini par

$$\overrightarrow{OM}(t) = f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \text{ ou bien } f(t) = x(t) + iy(t)$$

la quantité :

$$L = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Cette définition se justifie par les raisons suivantes :

- (1) Si  $f(t) = B + t\vec{u}$ , l'arc paramétré est un segment de longueur  $(b - a) \|\vec{u}\|$ , ce qui correspond à la valeur donnée par la définition.
- (2) Pour un cercle de rayon  $R$ ,  $f(t) = R(\cos t.\vec{i} + \sin t.\vec{j})$  et la définition donne pour longueur du cercle  $2\pi R$ .

**Proposition III.1** Deux chemins finis équivalents ont même longueur.

**Preuve:** Soit  $g \circ \theta = f$ , on suppose  $\theta$  strictement croissante avec  $a' = \theta(a)$ ,  $b' = \theta(b)$ , donc

$$\int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b |g'(\theta(t))\theta'(t)| dt = \int_a^b |g'(\theta(t))| \theta'(t) dt = \int_{a'}^{b'} |g'(u)| du.$$

#### III.2 Abscisse curviligne

**Définition III.2** Soit  $f$  un arc paramétré de classe  $C^1$ , le point  $M(t_0) = M_0$  étant choisi comme origine. On appelle abscisse curviligne du point  $M(t)$ , la quantité :

$$s(t) = \int_{t_0}^t |f'(u)| du = \int_{t_0}^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2} du.$$

les autres abscisses curvilignes de  $f$  sont de la forme

$$\sigma(t) = s_0 \pm \int_{t_0}^t |f'(u)| du \text{ avec } t_0 \in I \text{ et } s_0 \in \mathbb{R}.$$

Si  $t \geq t_0$ ,  $s(t)$  n'est autre que la longueur de la courbe entre  $M(t)$  et  $M(t_0)$ . Si  $t \leq t_0$ ,  $s(t)$  est l'opposé de la longueur de la courbe entre  $M(t)$  et  $M(t_0)$ .

L'abscisse curviligne joue donc pour une courbe le même rôle que la mesure algébrique (ou abscisse) pour une droite munie d'une origine et d'un sens (droite orientée ou axe).

**Remarque III.1** En polaire  $s$  s'écrit :  $s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{[r'(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2} d\varphi.$

### Propriétés de l'abscisse curviligne

- (1)  $|s(t) - s(t')| = L(M(t), M(t'))$  : longueur de la courbe entre  $M(t)$  et  $M(t')$ .  
 (2) Un chemin  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est dit normal (ou de paramétrage normal) si  $|f'(s)| = 1$  pour tout  $s \in I$ ; tout chemin régulier  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est équivalent à un chemin normal.

**En effet:**  $s'(t) = \|f'(t)\|$  ou encore  $\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|$ . Donc, sauf aux points où  $f'(t)$  s'annule (points stationnaires),  $s$  est une fonction strictement croissante de  $t$  et continue. Elle est donc bijective. On peut donc effectuer un changement de paramètre en prenant l'abscisse curviligne elle-même au lieu de  $t$ . Il s'agit d'un changement de paramètre admissible. Si  $x = s(t)$ , le nouveau paramètre est  $x$ , on a :

$$g(x) = f(s^{-1}(x)) \text{ i.e : } M(t) = M(s^{-1}(x))$$

D'où  $g'(x) = (s^{-1})'(x)f'[s^{-1}(x)] = \frac{1}{s'[s^{-1}(x)]}f'[s^{-1}(x)]$ . On en déduit

$$\|g'(x)\| = 1.$$

En général, on note  $s = s(t)$  pour alléger les notations, on écrit alors :

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \right\| = 1$$

**Remarque III.2** Physiquement,  $f'(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v}(t)$  est la vitesse vectorielle.  $s'(t) = \frac{ds}{dt}$  est la vitesse scalaire.  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$  est un vecteur unitaire.

### III.3 Repère de Frénet

Les courbes sont de classes  $\mathcal{C}^2$ . Les points sont supposés biréguliers (pas de point stationnaires, pas de point de rebroussement, pas de point d'inflexion ...).

#### Vecteur normé tangent à l'arc, au point $M(t)$ :

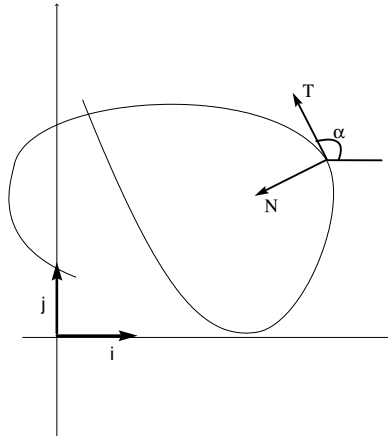
Le vecteur normé tangent à l'arc  $\Gamma$  au point  $M(t)$  est défini par :

$$\vec{T} = \frac{\overrightarrow{f'(t)}}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|} = \frac{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|}.$$

Donc par définition de l'abscisse curviligne  $s$  (i.e :  $\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|$ ), on a :

$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \text{ ou encore } \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T}.$$

**Remarque III.3** Physiquement,  $t$  est le temps,  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$  est la vitesse vectorielle  $\vec{v}$ ,  $\frac{ds}{dt}$  la vitesse scalaire  $v$ .  $\vec{T}$  n'est défini qu'en des points non stationnaires et est de norme 1. C'est le vecteur tangent unitaire. La relation  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$  exprime simplement que  $\vec{v} = v\vec{T}$ .



**Vecteur normal à l'arc, au point M(t) :**

Soit  $\vec{N}$  le vecteur unitaire directement orthogonal à  $\vec{T}$ . Soit  $\alpha$  l'angle entre le vecteur de base  $\vec{i}$  et  $\vec{T}$  (voir figure), de sorte que

$$\vec{T} = \cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j} \text{ et } \vec{N} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}.$$

$\alpha$  est évidemment fonction du paramètre  $t$ . Nous admettrons le théorème suivant :

**Théorème III.1 (dit de relèvement)** Si  $f$  est de classe  $C^k, k \geq 2$ , alors  $\vec{T}$  est de classe  $C^{k-1}$ , en la variable  $t$ . Il existe une fonction  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{k-1}$  telle que :

$$\forall t \in I : \vec{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j}.$$

En général : si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  est un chemin (de classe  $C^k$ ) ne passant pas par 0, il existe une fonction  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{k-1}$  telle que

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\theta(t)} \text{ pour tout } t \in I.$$

**Remarque III.4** Dans le cas d'arc birégulier,  $\alpha$  définit un paramétrage admissible. En effet :

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \vec{N}, \text{ donc } \frac{d\alpha}{dt} = \left[ \vec{T}, \frac{d\vec{T}}{dt} \right] = \left[ \frac{d\vec{OM}}{dt}, \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right] \neq 0.$$

Comme  $\vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$ , on a, dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\alpha) \text{ et } \frac{dy}{ds} = \sin(\alpha).$$

**Définition III.3** Le repère de Frenet au point  $M(t)$  est par définition le **repère mobile**  $(M(t), \vec{T}, \vec{N})$ .

**III.4 Courbure, rayon de courbure, centre de courbure**

**Définition III.4** On appelle courbure de l'arc  $\Gamma$  au point  $M(t)$ , le scalaire :

$$c(t) = \frac{d\alpha}{ds} = \left[ \vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right] = \left[ \frac{d\vec{OM}}{ds}, \frac{d^2\vec{OM}}{ds^2} \right]$$

**Remarque III.5** Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  un chemin normal ; la courbure de  $\gamma$  est

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \frac{\gamma''(s)}{i\gamma'(s)} ;$$

**Exemple III.1** Un cercle de centre  $O(0,0)$  et de rayon  $R$

$$\begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases}$$

on a donc  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R \{-\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j}\}$  et par suite  $\frac{ds}{dt} = R$  et  $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} + t$ . On a alors :

$$c = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{R}$$

donc la courbure est l'inverse du rayon du cercle. Si  $R = 1$ ,  $c = \frac{(e^{it})''}{i(e^{it})'} = \frac{-e^{it}}{-e^{it}} = 1$ .

Dans le cas général, en dérivant par rapport à  $\alpha$  et à  $s$  les expressions  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$ , on obtient immédiatement les formules dites de Frenet :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{d\alpha} &= \vec{N} & \text{et} & & \frac{d\vec{N}}{d\alpha} &= -\vec{T} \\ \frac{d\vec{T}}{ds} &= c\vec{N} & \text{et} & & \frac{d\vec{N}}{ds} &= -c\vec{T} \end{aligned}$$

**Définition III.5** La quantité  $R = \frac{1}{c}$  s'appelle rayon de courbure.

Courbure et rayon de courbure sont des grandeurs algébriques. Connaissant  $R$ , il est facile de trouver le **centre de courbure**  $\Omega = M + R\vec{N}$ . Il n'est pas constant en général, sauf dans le cas du cercle. Le cercle de centre  $\Omega$  de rayon  $R$  s'appelle **cercle osculateur** de la courbe au point considéré.

Si  $\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$ , alors  $\frac{1}{R} = 0$ . Par convention  $R$  est dit infini. La courbure est nulle. Cela se produit sur les segments de droites (évident) ou aux points d'inflexion.

**Remarque III.6** Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  un chemin normal ; le centre de courbure de  $\gamma$  au point  $\gamma(s)$  est

$$\Omega = \gamma(s) + \frac{\gamma''(s)}{c(s)}.$$

## Calcul de la courbure

Le calcul de  $R$  se fait comme suit :

On a  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$  donc  $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{dt}$  et par suite :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{R} \vec{N}$$

$$\text{car } \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{ds} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 c\vec{N}.$$

On reconnaît dans l'expression précédente celle de l'accélération vectorielle  $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$  d'un point mobile, somme de l'accélération tangentielle  $\frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} = \frac{dv}{dt} \vec{T}$  et de l'accélération normale  $\frac{v^2}{R} \vec{N}$ .

**Remarque III.7** D'après la relation précédente, donnant l'expression de l'accélération dans le repère de Frenet, on déduit que :

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{1}{R}$$

ce qui donne une autre façon de calculer la courbure.

**En coordonnées cartésiennes** On obtient :

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right] = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = \left( \sqrt{x'^2 + y'^2} \right)^3 \frac{1}{R} \text{ donc } R = \frac{\left( \sqrt{x'^2 + y'^2} \right)^3}{x'y'' - x''y'}$$

**En coordonnées polaires** Où  $r = r(\theta)$ , c.à.d  $\overrightarrow{OM} = r(\theta)\vec{u}_\theta$ , avec  $\vec{u}_\theta = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}$ , et  $\vec{u}'_\theta = -\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j}$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}, \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2} \right] &= [r'(\theta)\vec{u}_\theta + r(\theta)\vec{u}'_\theta, (r''(\theta) - r(\theta))\vec{u}_\theta + 2r'(\theta)\vec{u}'_\theta] \\ &= \begin{vmatrix} r' & r'' - r \\ r & 2r' \end{vmatrix} = r^2 + 2r'^2 - rr'' \end{aligned}$$

d'autre part  $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r'^2 + r^2}$ , donc :

$$R = \frac{\left( \sqrt{r'^2 + r^2} \right)^3}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$$

### Exemples

(1) **Ellipse :**

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{Dans ce cas on a : } R = \frac{\left( \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \right)^3}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} = \frac{\left( b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t \right)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

(2) **Cycloïde :**

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$\text{Dans ce cas on a : } R = \frac{\left( \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \right)^3}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} = -4a \sin \frac{t}{2}, \text{ pour } t \in [0, 2\pi].$$