Équations différentielles

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Table des matières

I Équations linéaires de premier ordre

Définition I.1 Une équations différentielles linéaire du premier ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{I.1}$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ étant l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, a étant non identiquement nulle.

On appelle solution de (I.1) toute fonction y dérivable sur I, vérifiant $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ pour tout $x \in I$.

Remarque I.1 Bien entendu comme pour toute équation l'inconnue y peut être notée z, f, g ..., et la variable réelle x peut être notée t, u, s ... Par exemple l'équation peut être écrite aussi sous la forme : $a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où l'inconnue est la fonction x et la variable est t.

Définition I.2 On appelle *équation homogène* ou encore *équation sans second membre* associée à (I.1), l'équation :

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{I.2}$$

Remarque I.2 Si dans ces définitions, la fonction a ne s'annulle pas sur I, l'équation (I.1) peut se mettre sous la forme

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x) \tag{I.3}$$

dite équation *normalisée* ou encore *résolue en y'*.

Exemples

(1) **La fonction exponnentielle :** Les solutions de l'équation

$$y' = y$$

sont les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ par $x \longmapsto \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

En effet : Il est évitent que ces fonctions sont solutions. D'autre part si y est solution alors la fonction $z = ye^{-x}$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$z'(x) = y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = 0$$

donc z est constante sur $\mathbb{R}$.

(2) $y' = y - 1$, sur $I = \mathbb{R}$. D'abord on remarque que la fonction constante égale à 1 est solution, et

$$y' = y - 1 \iff (y-1)' = (y-1)\,,$$

donc les solutions sont les fonctions y telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $y(x) - 1 = \lambda e^x$ c.à.d $y(x) = \lambda e^x + 1$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

I.1 Résolution de l'équation homogène normalisée

On considère l'équation

$$y' = a(x)y \tag{$\mathcal{H}_1$}$$

a est une fonction continue sur I (intervalle) à valeur dans $\mathbb{K}$. On cherche donc les solutions défines et dérivables sur I.

Théorème I.1 L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_1)$ est l'ensemble des fonctions définies sur I par :

$$x \longmapsto \lambda e^{A(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où A est une primitive de a sur I.

Remarque I.3 Par l'écriture $x \longmapsto \lambda e^{A(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$, on veut dire toutes les fonctions $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$, avec un langage plus évolué, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est la droite véctorielle engendrée par la fonction $e^{A(x)}$.

Preuve: Il suffit de démontrer que $z(x) = y(x)e^{-A(x)}$, est une fonction constante, si, et seulement si, y est solution de $(\mathcal{H}_1)$. En effet,

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (\mathcal{H}_1) &\iff \forall x \in I : y'(x) = a(x)y \\
&\iff \forall x \in I : \left(z(x)e^{A(x)}\right)' = a(x)\left(z(x)e^{A(x)}\right) \\
&\iff \forall x \in I : z'(x)e^{A(x)} + z(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)\left(z(x)e^{A(x)}\right) \\
&\iff \forall x \in I : z'(x)e^{A(x)} = 0 \\
&\iff \forall x \in I : z'(x) = 0 \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } \forall x \in I : z(x) = \lambda,
\end{aligned}$$

car une fonction dont la dérivée est nulle sur un **intervalle** est constante.

I.2 Résolution de l'équation avec second membre

On considère l'équation

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{$\mathcal{L}_1$}$$

a et b deux fonctions continues sur I (intervalle) à valeur dans $\mathbb{K}$. On cherche donc les solutions défines et dérivables sur I.

Théorème I.2 Si y_p est une solution de $(\mathcal{L}_1)$; alors une fonction y est une solution de $(\mathcal{L}_1)$ si, et seulement si, $y - y_p$ est une solution de $(\mathcal{H}_1)$. Ce qui veut dire que les solutions de $(\mathcal{L}_1)$ sont les fonctions :

$$y : x \longmapsto y_p(x) + \lambda e^{A(x)},\ \lambda \in \mathbb{K}.\ A \text{ étant primitive de } a \text{ sur } I.$$

Preuve: On a $y_p' = a(t)y_p + b(t)$ et

$$\begin{aligned}
(y - y_p)' = a(x)(y - y_p) &\iff y' - y_p' = y' - (a(x)y_p + b(x)) = a(x)(y - y_p) \\
&\iff y' = a(x)y + b(x) \\
&\iff y \text{ est une } I\text{-solutions de } (\mathcal{L}_1)
\end{aligned}$$

Remarque I.4 Connaissant la solution générale de l'équation homogène, il faut donc trouver une solution particulière. Différents moyens permettent de déterminer une solution particulière :

(1) Moyens heuristiques : tatonnement, expérimentation ...
(2) Principe de superposition : si on remarque que le second membre est somme de deux (ou plusiseurs) seconds membres pour lesquels on connait des solutions particulières, alors la somme des solutions particulières est une solution.
(3) La méthode de variation de la constante : décrite ci–dessous.

Méthode de la variation de la constante

On pose $y(x) = z(x)e^{A(x)}$ et on cherche une condition sur z pour que y soit solution de $(\mathcal{L}_1)$. Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
y'(x) = a(x)y(x) + b(x) &\iff z'(x)e^{A(x)} + z(x)\,a(x)e^{A(x)} = a(x)z(x)e^{A(x)} + b(x) \\
&\iff z'(x)e^{A(x)} = b(x) \\
&\iff z'(x) = b(x)e^{-A(x)}
\end{aligned}$$

Ainsi y est solution de $(\mathcal{L}_1)$ si, et seulement si, z est une primitive sur I de la fonction $x \longmapsto b(x)e^{-A(x)}$. Ce qui permet d'énnoncer la proposition suivante, qu'il faut éviter d'utiliser pour écrire directement la solution d'une équation différentielle donnée. Elle nous sera utile juste pour démontrer un résultat sur le *problème de Cauchy.*

Proposition I.1 L'ensemble des solutions de $(\mathcal{L}_1)$ est l'ensemble des fonctions

$$y : x \longmapsto \left(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\mathrm{d}t + \lambda\right) e^{A(x)},\ \lambda \in \mathbb{K}.\ A \text{ étant primitive de } a \text{ sur } I \text{ et } x_0 \in I.$$

I.3 Le problème de Cauchy

Définition I.3 On appelle problème de Cauchy associé à l'équation $(\mathcal{L}_1)$ au point $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème qu'on écrit

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$}$$

Qui consiste à trouver les solutions de $(\mathcal{L}_1)$ qui prennent la valeur y_0 en x_0.

Exemple :

$$\begin{cases} y' = y - 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

La solution générale de l'équation est

$$y(x) = \lambda e^x + 1,\ \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

La seule solution qui vérifie $y(0) = 0$ est telle que $\lambda e^0 + 1 = 0$ c.à.d $\lambda = -1$.

Théorème I.3 Pour toute donnée initiale $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})$ admet une solution unique.

Preuve: D'après la Proposition I.1, les solution de $(\mathcal{L}_1)$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto \left(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\mathrm{d}t + \lambda\right) e^{A(x)},\ \lambda \in \mathbb{K},$$

et la seule qui vérifie $(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})$ est donnée par $\left(\int_{x_0}^{x_0} b(t)e^{-A(t)}\mathrm{d}t + \lambda\right) e^{A(x_0)} = y_0$, c.à.d $\lambda = y_0 e^{-A(x_0)}$.

On peut donc déduire la proposition suivante :

Proposition I.2 Deux solutions de $(\mathcal{L}_1)$ qui coïncident en un point de I, sont identiques sur I.

II Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition II.1 On appelle *équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants*, une équation du type :

$$ay'' + b\,y' + c\,y = d(x) \tag{$(\mathcal{L}_2)$}$$

où $a \neq 0$, b et c sont des scalaires de $\mathbb{K}$ et d une fonction continue d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'équation

$$ay'' + b\,y' + c\,y = 0 \tag{$\mathcal{H}_2$}$$

une solution de $(\mathcal{L}_2)$ est une fonction deux fois dérivable sur I, vérifiant

$$\forall x \in I : ay''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = d(x)$$

II.1 Résolution de l'équation homogène

On s'intéresse dans cette section à l'équation $(\mathcal{H}_2)$ avec $a \neq 0$, b et c sont dans $\mathbb{K}$ et on cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

Proposition II.1 La fonction $x \longmapsto e^{rx}$ est une solution de $(\mathcal{H}_2)$ si, et seulement si, r est solution dans $\mathbb{K}$ de $r^2 + ar + b = 0$.

L'équation algébrique :

$$r \in \mathbb{K} : r^2 + ar + b = 0 \tag{II.1}$$

est appelée *équation caractéristique* de $(\mathcal{H}_2)$.

Preuve: On pose $y(x) = e^{rx}$, on obtient $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2e^{rx}$, on a donc

$$\begin{aligned} ay'' + b\,y' + c\,y = 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R} : ar^2e^{rx} + b\,re^{rx} + c\,re^{rx} = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} : \left(ar^2 + b\,r + cr\right) e^{rx} = 0 \\ &\iff ar^2 + b\,r + cr = 0\ . \qquad \text{cqfd.} \end{aligned}$$

Supposons que $r \in \mathbb{K}$ est solution de l'équation (II.1) donc $z(x) = e^{rx}$ est solution $(\mathcal{H}_2)$. On pose $y(x) = \lambda(x)e^{rx}$ et cherche λ pour que y soit solution de $(\mathcal{H}_2)$:

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathcal{H}_2) &\iff ay'' + b\,y' + c\,y = 0 \\ &\iff a\left(\lambda(x)e^{rx}\right)'' + b\left(\lambda(x)e^{rx}\right)' + c\lambda(x)e^{rx} = 0 \\ &\iff \left[a\left(\lambda''(x) + 2r\lambda'(x) + r^2\lambda(x)\right) + b\left(\lambda'(x) + r\lambda(x)\right) + c\lambda(x)\right] e^{rx} = 0 \\ &\iff a\left(\lambda''(x) + 2r\lambda'(x) + r^2\lambda(x)\right) + b\left(\lambda'(x) + r\lambda(x)\right) + c\lambda(x) = 0 \\ &\iff a\lambda''(x) + (2ar + b)\,\lambda'(x) + \left(ar^2 + br + c\right)\lambda(x) = 0 \\ &\iff a\lambda''(x) + (2ar + b)\,\lambda'(x) = 0 \end{aligned}$$

Premier cas : si $2ar + b \neq 0$ (ce qui veut dire que r est racine simple de (II.1), $\triangle \neq 0$) alors λ' est solution de l'équation de premier à coefficient constants :

$$az' + (2ar + b)\,z = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathcal{H}_2) &\iff \lambda'(x) = Ae^{(-2r-b/a)x}\ ,\ \ A \in \mathbb{K} \\ &\iff \lambda(x) = A\frac{1}{(-2r - b/a)}e^{(-2r-b/a)x} + B\ ,\ \ A, B \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

et avec $y(x) = \lambda(x)e^{rx}$, on a :

$$y \text{ est solution de } (\mathcal{H}_2) \iff y(x) = A\frac{1}{(-2r - b/a)}e^{(-r-b/a)x} + Be^{rx}\ ,\ \ A, B \in \mathbb{K}$$

en remarquant que $r' = -r - b/a$ est la deuxième racine de (II.1), on a :

$$y \text{ est solution de } (\mathcal{H}_2) \iff y(x) = Ce^{r'x} + Be^{rx}\ ,\ \ C, B \in \mathbb{K}$$

Deuxième cas : si $2ar + b = 0$ (ce qui veut dire que r est racine double de (II.1), $\triangle = 0$) alors λ est solution de l'équation triviale de second :

$$az'' = 0$$

et donc

$$y \text{ est solution de } (\mathcal{H}_2) \iff \lambda(x) = Ax + B\ ,\ \ A, B \in \mathbb{K}$$

et avec $y(x) = \lambda(x)e^{rx}$, on a :

$$y \text{ est solution de } (\mathcal{H}_2) \iff y(x) = (Ax + B)\,e^{rx}\ ,\ \ A, B \in \mathbb{K}.$$

On déduit donc les théorèmes suivants.

Le cas complexe

Théorème II.1 Soit l'équation $(\mathcal{H}_2)$ avec $a \neq 0$, b et c sont dans $\mathbb{C}$, on note $\triangle$ le discriminant de (II.1).

(i) Si l'équation caractéristique (II.1) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 ($\triangle \neq 0$), alors les solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x},\ \ A, B \in \mathbb{C}.$$

(ii) Si l'équation caractéristique (II.1) admet une racine double r ($\triangle = 0$), alors les solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto (Ax + B)\,e^{rx},\ \ A, B \in \mathbb{C}.$$

Passage du complexe au réel

Proposition II.2 Si y est une solution de $ay'' + b\,y' + c\,y = 0$, alors $\overline{y}$ est une solution de $\overline{a}y'' + \overline{b}y' + \overline{c}y = 0$. En particulier si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et si y est une solution complexe de $(\mathcal{H}_2)$ alors $\mathrm{Re}(y)$ et $\mathrm{Im}(y)$ sont aussi solutions de $(\mathcal{H}_2)$.

Preuve: évidente, faites la comme exercice.
Ce qui permet de déduire le résultat suivant.

Le cas réel

Théorème II.2 Soit l'équation $(\mathcal{H}_2)$ avec $a \neq 0$, b et c sont dans $\mathbb{R}$, on note $\triangle$ le discriminant de (II.1).

(i) Si l'équation caractéristique (II.1) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 ($\triangle > 0$), alors les solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(ii) Si l'équation caractéristique (II.1) admet une racine double r ($\triangle = 0$), alors les solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto (Ax + B)\, e^{rx}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(iii) Si l'équation caractéristique (II.1) n'admet pas de racines réelles ($\triangle < 0$) mais plutôt deux racines complexes conjuguées $z_1 = u + iv$ et $z_2 = u - iv$, alors les solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto e^{ux} \left(A\cos(vx) + B\sin(vx)\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

II.2 Résolution de l'équation avec second membre

On s'intéresse dans cette section à l'équation $(\mathcal{L}_2)$ avec $a \neq 0$, b et c sont dans $\mathbb{K}$ et d une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On cherche les solutions de $(\mathcal{L}_2)$ définies sur I. Comme dans le cas du premier ordre, on a le théorème.

Théorème II.3 Si y_p est une solution de $(\mathcal{L}_2)$; alors une fonction y est une solution de $(\mathcal{L}_2)$ si, et seulement si, $y - y_p$ est une solution de $(\mathcal{H}_2)$. Ce qui veut dire que les solutions de $(\mathcal{L}_2)$ sont les fonctions :

$$y : x \longmapsto y_p(x) + y_0(x), \; y_0 \text{ solution de } (\mathcal{H}_2).$$

Remarque II.1 On obtient les solutions de $(\mathcal{L}_2)$ en ajoutant à une solution (particulière) de $(\mathcal{L}_2)$ une solution quelconque de $(\mathcal{H}_2)$. Connaissant la solution générale de l'équation homogène, il faut donc trouver une solution particulière. Comme dans le cas de l'équation de premier ordre, différents moyens permettent de déterminer une solution particulière :

(1) Moyens heuristiques : tatonnement, expérimentation ...

(2) Principe de superposition : si on remarque que le second membre est somme de deux (ou plusiseurs) seconds membres pour lesquels on connait des solutions particulières, alors la somme des solutions particulières est une solution.

(3) La méthode de variation des constantes (voir le complément).

Cas d'un second membre de la forme $P(x)$

Soit a, b et c dans $\mathbb{K}$ et P fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation

$$ay'' + b\,y' + c\,y = P(x) \qquad (\mathcal{L}_P)$$

Proposition II.3 Si $c \neq 0$, l'équation $(\mathcal{L}_P)$ admet une solution particulière polynômiale de même degré que P.

Preuve: On pose $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et on cherche y sous la forme $y(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$. En reportant dans $(\mathcal{L}_P)$ et en identifiant les deux polynômes obtenus :

$$\begin{aligned}
& a\sum_{k=2}^{n} k(k-1)b_k x^{k-2}+b\sum_{k=1}^{n} kb_k x^{k-1}+c\sum_{k=0}^{n} b_k x^k=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\\
\iff\ & \sum_{k=0}^{n-2} a\,(k+1)\,(k+2)\,b_{k+2}x^k+\sum_{k=0}^{n-1} b\,(k+1)\,b_{k+1}x^k+\sum_{k=0}^{n} cb_k x^k=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\\
\iff\ & \sum_{k=0}^{n-2}\left(a\,(k+1)\,(k+2)\,b_{k+2}+b\,(k+1)\,b_{k+1}+cb_k\right)x^k+\left(bnb_n+cb_{n-1}\right)x^{n-1}+cb_n x^n=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\\
\iff\ & \left\{\begin{array}{lllll} cb_0 & +bb_1+2ab_2 & & & =a_0\\ & \ddots & & & \vdots\\ & & cb_{n-1} & + \quad bnb_n & =a_{n-1}\\ & & & cb_n & =a_n \end{array}\right.
\end{aligned}$$

le dernier système linéaire est triangulaire avec tous les coefficients diagonaux non nuls, donc admet une unique solution.

Remarque II.2 Dans le cas $c=0$, il évident de voir que $(\mathcal{L}_P)$ devient une équation d'ordre 1 en y', et donc si dans ce cas $b\neq 0$ l'équation admet une solution polynômiale de degré égal à $\deg(P)+1$. De même si $c=b=0$ et $a\neq 0$ $(\mathcal{L}_P)$ alors l'équation admet une solution polynômiale de degré égal à $\deg(P)+2$.

Exemple II.1 $y''-y=1-x+x^2$. Ici le second membre polynôme de degré 2, on cherche une solution y_p la forme

$$y_p(x)=ax^2+bx+c;\ a,b,c\in\mathbb{R}$$

en dérivant et en utilisant l'équation différentielle, on a :

$$\begin{aligned}
y''-y=1-x+x^2 &\iff 2a-ax^2-bx-c=1-x+x^2\\
&\iff -c+2a-bx-ax^2=1-x+x^2\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} -c+2a=1\\ -b=-1\\ -a=1\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} c=-3\\ b=1\\ a=-1\end{array}\right.
\end{aligned}$$

donc $y_p(x)=-x^2+x-3$, et la solution générale est $y:x\longmapsto Ae^x+Be^{-x}-x^2+x-3$, $A,B\in\mathbb{R}$.

Cas d'un second membre de la forme $e^{\alpha x}P(x)$

Soit a,b et c dans $\mathbb{K}$, $\alpha\in\mathbb{K}$ et P fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation

$$ay''+b\,y'+c\,y=e^{\alpha x}P(x) \qquad (\mathcal{L}_{PE})$$

En posant $y=e^{\alpha x}z$, on se ramène à l'équation de second ordre en z avec comme second membre $P(x)$:

$$az''+(2a\alpha+b)\,z'+\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)z=P(x)$$

on distingue donc les cas où α est racine (simple ou double) ou pas racine du tout de l'équation caractéristique (II.1).

Proposition II.4 L'équation $(\mathcal{L}_{PE})$ admet une solution particulière de la forme $e^{\alpha x}Q(x)$ où Q est polynômiale de degré

(i) égal à $\deg(P)$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique (II.1),

(ii) égal à $\deg(P)+1$ si α est racine simple de l'équation caractéristique (II.1),

(iii) égal à $\deg(P)+2$ si α est racine double de l'équation caractéristique (II.1),

Remarque II.3 Si le second membre est de la forme $P_1(x)\cos(\alpha x)$ (ou $P_2(x)\sin(\alpha x)$), on se ramène au cas précédent en remarquant que $\cos(\alpha x)$ est la partie réelle de $e^{i\alpha x}$.

Exemple II.2 $y''+y=\cos x$. Ici l'équation caractéristique est $r^2+1=0$ dont les racines sont i et $-i$ et avec $\cos x = \cos 1x$ comme second membre et $1i$ racine simple de l'équation caractérisque, il faut donc chercher une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = ax\cos x + bx\sin x;\ \ a,b\in\mathbb{R}.$$

En dérivant et repportant dans l'équation différentielle, on a :

$$\begin{aligned} y_p''(x)+y_p(x)=\cos x &\iff -2a\sin x - ax\cos x + 2b\cos x - bx\sin x + ax\cos x + bx\sin x = \cos x \\ &\iff -2a\sin x + 2b\cos x = \cos x \\ &\iff \begin{cases} a=0 \\ b=1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

une solution est donc $y_p(x) = \frac{1}{2}x\sin x$. La solution générale est donc $y : x \longmapsto A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$, $A,B\in\mathbb{R}$.

II.3 Le problème de Cauchy

Définition II.2 On appelle problème de Cauchy associé à $(\mathcal{L}_2)$ en $(x_0,y_0,y_1)\in I\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}$, le problème qui consiste à trouver les fonctions y vérifiant

$$\begin{cases} ay''+by'+cy=d(x) \ \text{ sur } \ I, \\ y(x_0)=y_0 \ \text{ et } \ y'(x_0)=y_1. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_{\mathcal{C}2}$}$$

Proposition II.5 Si le problème de Cauchy $(\mathcal{P}_{\mathcal{C}2})$ admet une solution elle unique. Dans le cas des second particuliers ci–dessus ($d(x)=P(x)$ ou $d(x)=e^{\alpha x}P(x)$), le problème admet une solution unique.

Exemple II.3 $\begin{cases} y''+y=\cos x. \\ y(0)=1 \ \text{ et } \ y'(0)=1. \end{cases}$. D'après les calculs de l'Exemple II.2, la solution de l'équation générale est

$$y : x \longmapsto A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x\sin x,\ A,B\in\mathbb{R}.$$

donc $y'(x) = -A\sin x + B\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x\cos x$, et en traduisant la condition initiale, on a $A=B=1$. Donc la solution du problème de Cauchy est la fonction

$$y(x) = \cos x + \sin x + \frac{1}{2}x\sin x$$

III Equations différentielles à variables séparées

III.1 Définitions – exemples

Définition III.1 Une équation différentielle du premier ordre est dite à variables séparées (ou séparables) si elle peut s'écrire sous la forme :

$$f(y).y' = g(x) \tag{$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$}$$

où g et f sont des fonctions définies respectivement sur deux intervalles I et J.

Une solution de $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}})$ est la donnée d'un couple (Ω,y) où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I et y une fonction dérivable sur Ω à valeur dans J vérifiant

$$\forall x\in\Omega : f(y(x)).y'(x) = g(x).$$

Remarque III.1 Evidemment l'enjeu est de trouver une solution définie sur l'intervalle Ω le plus grand possible, qu'on appelle *solution maximale.*

Exemples

(1) Toute équation linéaire homogène de premier ordre $y'(x) = a(x)y(x)$ peut être considérée comme à variables séparables en faisant attention que la fonction y peut s'annuler.

(2) $y' \ln(1+y^2) = 2x$ est à variables séparables de même pour $(1+x^2)y' = 1+y^2$ qui s'écrit aussi $\dfrac{y'}{1+y^2} = (1+x^2)$.

III.2 Résolution

Proposition III.1 Soient G une primitive de g, F une primitive de f et y une fonction dérivable , (Ω, y) est solution de $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}})$ si et seulement si

$$\forall x \in \Omega : F(y(x)) = G(x) + k$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

En effet: D'une part si $F(y(x)) = G(x) + k$ alors $F'(y(x))y'(x) = G'(x)$ donc $f(y(x))y'(x) = g(x)$. Réciproquement si pour tout $x \in \Omega : f(y(x))y'(x) = g(x)$ alors $\displaystyle\int f(y(x))y'(x)\mathrm{d}x = \int g(x)\mathrm{d}x$ et la formule d'intégration par changement de variable donne $F(y(x)) = G(x) + k$.

Remarque III.2 Dans la pratique, on écrit $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, puis, symboliquement $f(y)\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x$, on a :

$$\begin{aligned} f(y)\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x &\iff \int f(y)\mathrm{d}y = \int g(x)\mathrm{d}x \\ &\iff F(y(x)) = G(x) + k \end{aligned}$$

Il s'agit donc de trouver des intervalles U sur lesquels F est bijective , et ensuite d'exprimer y en fonction de x et de k :

$$F(y) = G(x) + k \iff y = F^{-1}(G(x) + k),$$

sur chaque intervalle Ω où $G(x) + k \in F(U)$.

Exemples

(1) $xy' \ln(x) = (3\ln(x) + 1)y$. On peut "séparer les variables" (x et y) en divisant par $yx\ln(x)$, ce qui est permis si et seulement si $y \neq 0$ (car $x\ln(x) > 0$) d'après l'énoncé). On a :

$$\frac{y'}{y} = \frac{3\ln x + 1}{x\ln x} \iff \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int \frac{3\ln x + 1}{x\ln x}\mathrm{d}x + k = \int \frac{3}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$, soit donc $\ln|y| = 3\ln|x| + \ln|\ln x| + k = \ln|x^3 \ln x| + k$,avec $k \in \mathbb{R}$. En prenant l'exponentielle de cette expression, on a finalement :

$$y(x) = \lambda x^3 \ln x \text{ sur } \Omega =]1, +\infty[, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(2) $y^2y' = x^2$. On a donc $y^2\mathrm{d}y = x^2\mathrm{d}x$ et en intégrant $\dfrac{1}{3}y^3 = \dfrac{1}{3}x^3 + k$, on obtient donc la solution générale définie sur tout $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \sqrt[3]{x^3 + \lambda}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Ici } \sqrt[3]{\ } \text{ est supposée définie sur } \mathbb{R}.$$

(3) $y' \ln(y) = e^x$. On se ramène à $\ln(y)\mathrm{d}y = e^x\mathrm{d}x$ et en intégrant on obtient :

$$y\ln(y) - y = e^x + k,\ k \in \mathbb{R},$$

on remarque que l'on ne trouve pas une expression pour y mais une relation entre x et y.

IV Compléments

IV.1 Wronskien de deux applications et variation des constantes

Définition IV.1 On appelle *wronskien* des applications h_1 et h_2 de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, l'application $w(h_1, h_2)$ définie par

$$\forall t \in I,\ w(h_1,h_2)(t) = \det \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix} = h_1(t)h_2'(t) - h_1'(t)h_2(t)$$

Remarque IV.1 Le wronskien $w(h_1, h_2)$ est une application continue sur I.
Deux applications proportionnelles ont un wronskien identiquement nul.

Proposition IV.1 (Wronskien de deux solutions de $(\mathcal{H}_2)$) Soient h_1 et h_2 deux solutions de $(\mathcal{H}_2)$; ou bien le wronskien $w(h_1, h_2)$ est identiquement nul sur I et les fonctions h_1 et h_2 sont proportionnelles, ou bien le wronskien $w(h_1, h_2)$ ne s'annule pas sur I.

Preuve: Puisque h_1 et h_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$, $w(h_1, h_2)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et, par dérivation

$$\begin{aligned} w(h_1,h_2)' &= (h_1h_2' - h_1'h_2)' = (h_1'h_2' + h_2h_2'') - (h_2''h_2 + h_1'h_2') \\ &= h_1h_2'' - h_1''h_2 = h_1(-\frac{b}{a}h_2' - \frac{c}{a}h_2) - (-\frac{b}{a}h_1' - \frac{c}{a}h_1)h_2 \\ &= -\frac{b}{a}(h_1h_2' - h_1'h_2) \\ &= -\frac{b}{a}w(h_1,h_2) \end{aligned}$$

Ainsi $w(h_1, h_2)(x) = \lambda e^{A(x)}$ où A est une primitive de $-\frac{b}{a}$, et $w(h_1, h_2)$ est soit identiquement nul, soit ne s'annule pas sur I.

Définition IV.2 Soient h_1, h_2 deux solutions de $(\mathcal{H}_2)$. On dit que (h_1, h_2) est un **système fondamental** de solutions de l'équation homogène $(\mathcal{H}_2)$ si toute solution de $(\mathcal{H}_2)$ est de la forme $Ah_1 + Bh_2$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Proposition IV.2 Soient (h_1, h_2) un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H}_2)$; pour toute fonction numérique f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, il existe un unique couple (g_1, g_2) de fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, tel que

$$\forall t \in I,\ f(t) = h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t) \qquad et \qquad f'(t) = h_1'(t)g_1(t) + h_2'(t)g_2(t)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\forall t \in I,\ f(t) = h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t) \qquad et \qquad 0 = h_1(t)g_1'(t) + h_2(t)g_2'(t)$$

Preuve: Rappelons que la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$, et, dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Il suffit de résoudre le système linéaire, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} f(t) &= h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t) \\ f'(t) &= h_1'(t)g_1(t) + h_2'(t)g_2(t) \end{aligned}$$

que l'on écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

Puisque le wronskien $w(h_1, h_2)(t)$ ne s'annule pas sur I, il vient

$$\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{w(h_1,h_2)(t)} \begin{pmatrix} h_2'(t) & -h_2(t) \\ -h_1'(t) & h_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

On constate que les fonctions g_1 et g_2 sont uniques et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

En dérivant l'identité $\forall t \in I,\ f(t) = h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t)$, on obtient :

$$f'(t) = h_1'(t)g_1(t) + h_2'(t)g_2(t) + h_1(t)g_1'(t) + h_2(t)g_2'(t)$$

On a donc l'équivalence, pour tout $t \in I$,

$$f'(t) = h_1'(t)g_1(t) + h_2'(t)g_2(t) \Longleftrightarrow 0 = h_1(t)g_1'(t) + h_2(t)g_2'(t)$$

Méthode de variation *des* constantes

Soit (h_1, h_2) un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H}_2)$. La proposition précédente montre que l'on peut rechercher les solutions y de $(\mathcal{L}_2)$ sous la forme :

$$y(x) = y_1(x)h_1(x) + y_2(x)h_2(x)$$

c'est la méthode de variations des constantes. Avec les conditions équivalentes :

$$y' = h_1'y_1 + h_2'y_2 \iff 0 = h_1y_1' + h_2y_2'$$

en dérivant

$$y'' = h_1''y_1 + h_2''y_2 + h_1'y_1' + h_2'y_2'$$

et en substituant dans l'équation $(\mathcal{L}_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x) &= ay'' + by' + cy \\ &= a\left(h_1''y_1 + h_2''y_2 + h_1'y_1' + h_2'y_2'\right) + b\left(h_1'y_1 + h_2'y_2\right) + c\left(y_1h_1 + y_2h_2\right) \\ &= a\left(h_1'y_1' + h_2'y_2'\right) \end{aligned}$$

Les fonctions inconnues y_1 et y_2 sont donc solutions du système linéaire

$$\forall x \in I, \qquad \begin{aligned} 0 &= h_1(x)y_1' + h_2(x)y_2' \\ \frac{1}{a}d(x) &= h_1'(x)y_1' + h_2'(x)y_2' \end{aligned}$$

ce qui donne, pour tout $x \in I$,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x) & h_2(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x) & h_2(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}d(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{w(h_1, h_2)(x)} \begin{pmatrix} h_2'(x) & -h_2(x) \\ -h_1'(x) & h_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}d(x) \end{pmatrix}$$

d'où l'expression des fonctions y_1' et y_2' :

$$\forall x \in I,\ y_1'(x) = -\frac{1}{a}\frac{d(x)h_2(x)}{h_1(x)h_2'(x) - h_1'(x)h_2(x)} \quad \text{et} \quad y_2'(x) = \frac{1}{a}\frac{d(x)h_1(x)}{h_1(x)h_2'(x) - h_1'(x)h_2(x)}$$

Ce qui permet de déterminer y_1 et y_2, et donc y après le calcul de deux primitives.

IV.2 Equations non linéaires d'ordre 1 se ramenant à des équations linéaires

Équation de Bernouilli

Définition IV.3 Une équation différentielle est dite de Bernouilli si elle est de la forme :

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \qquad (Ber)$$

où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Pour résoudre l'équation (Ber) on pose $u = y^{1-\alpha}$. Cette substitution transforme l'équation (Ber) en une équation différentielle linéaire en la nouvelle variable u.

Remarque IV.2 Si $n = 1$, l'équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle linéaire.

Équations de Ricatti

Définition IV.4 Les équations de Ricatti sont des équations différentielles de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad (Ric)$$

méthode de résolution : Si y_1 est une solution particulière alors on pose le changement de fonction suivant :

$$y = y_1 + \frac{1}{z}.$$

Cette substitution transforme l'équation (Ric) en une équation linéaire en z.

Équations de Lagrange

Définition IV.5 Les équations de Lagrange sont des équations différentielles de la forme :

$$y = xf(y') + g(y') \qquad (Lag)$$

Pour intégrer les équations de Lagrange, on pose $y' = p = \dfrac{dy}{dx}$, (Lag) devient :$y = xf(p) + g(p)$, et on differentie :

$$\begin{aligned} dy &= f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp \\ pdx &= f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp \\ (p - f(p))dx &= \left[xf'(p) + g'(p)\right] dp. \end{aligned}$$

On transformé (Lag) en une équation différentielle linéaire en $\dfrac{dx}{dp} = x'$.