

Fonctions complexes d'une variable réelle

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Table des matières

I Généralités	1
I.1 Définitions-Exemples	1
I.2 Fonctions monotones	2
I.3 Fonctions paires, impaires	2
I.4 Fonctions périodiques	2
II Limites et continuité	3
II.1 Définitions – Exemples	3
II.2 Propriétés	5
II.3 Propriétés avec la relation d'ordre	6
II.4 Composition des limites	6
II.5 Fonctions continues sur un intervalle	7
III Dérivées	7
III.1 Définitions - Exemples	7
III.2 Propriétés	9
III.3 Opérations sur les fonctions dérivables	9
III.4 Dérivées successives	11
III.5 Etude globale des fonctions dérivables	12
IV Fonctions usuelles	15
IV.1 Fonctions hyperboliques	15
IV.2 Réciproques des fonctions hyperboliques	15
IV.3 Réciproques des fonctions circulaires	16
V Développements limités	17
V.1 Définitions – Exemples	17
V.2 Propriétés	18
V.3 D.L de fonctions usuelles	19
V.4 Règles de calcul des D.L	19
VI Primitives et intégrales	21
VI.1 Définitions-Exemples	21
VI.2 Propriétés	21
VI.3 Calcul d'intégrales	22
VI.4 Primitives de fonctions usuelles	23

I Généralités

I.1 Définitions-Exemples

On suppose que les fonctions qui interviennent ici sont définies sur un domaine \mathcal{D} qui soit un intervalle de \mathbb{R} (éventuellement privé d'un nombre fini de points) à valeur dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si f est définie sur une partie de \mathbb{R} , on écrit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et on appelle domaine de définition de f l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$$

Définition I.1 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle **graphe** de f l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x, f(x))$ dans un repère donné.

Si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) + i \operatorname{Im}(f(x))$. Les fonctions : $x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$ qui sont définies sur \mathcal{D} à valeur dans \mathbb{R} sont respectivement appelées partie réelle et partie imaginaire de f .

On définit aussi le module de f , c'est à dire la fonction

$$|f| : x \mapsto |f(x)| = \left([\operatorname{Re}(f(x))]^2 + [\operatorname{Im}(f(x))]^2 \right)^{1/2},$$

et aussi la fonction conjuguée de f par, $\bar{f} : x \mapsto \overline{f(x)} = \operatorname{Re}(f(x)) - i \operatorname{Im}(f(x))$.

Définition I.2 Une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite bornée si la fonction $|f|$ est une fonction bornée. ie :

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, |f(x)| \leq M.$$

Exemples

(1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1} + i \ln x, \mathcal{D}_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[.$

(2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto \exp(ix) = \cos x + i \sin x.$

(3) Valeur absolue

La valeur absolue d'un réel x est le réel positif $|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$

(4) Partie entière

La partie entière d'un réel x est l'unique entier noté $E(x)$ tel que :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Exercice I.1 Montrer que :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1.$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq 3E(2x) - 2E(3x) \leq 1.$

On munit l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ des applications (fonctions) de \mathcal{D} dans \mathbb{C} des opérations suivantes :

- Addition : si $(f, g) \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})^2$, on définit l'application $(f + g) \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ par :

$$\forall x \in \mathcal{D} : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- Multiplication de deux fonctions : si $(f, g) \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})^2$, on définit l'application $(f \times g) \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ par :

$$\forall x \in \mathcal{D} : (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

Remarque I.1 Il est évident que les règles de calcul dans \mathbb{C} s'étendent aux opérations sur les fonctions.

En plus des opérations ci-dessus, on munit l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ de la relation d'ordre définie par :

- On dit que $f \leq g$ sur \mathcal{D} si $\forall x \in \mathcal{D} : f(x) \leq g(x)$.

Et on dira que f est majorée (resp minorée) sur \mathcal{D} s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{D} : f(x) \leq \alpha \text{ (resp } \forall x \in \mathcal{D} : \alpha \leq f(x)).$$

I.2 Fonctions monotones

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que

– f est **croissante** sur un intervalle I si

$$\text{pour tout } x, y \text{ dans } I : x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

– f est **décroissante** sur un intervalle I si

$$\text{pour tout } x, y \text{ dans } I : x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

– f est **strictement croissante** sur un intervalle I si

$$\text{pour tout } x, y \text{ dans } I : x < y \implies f(x) < f(y)$$

– f est **strictement décroissante** sur un intervalle I si

$$\text{pour tout } x, y \text{ dans } I : x < y \implies f(x) > f(y)$$

Si f est croissante ou décroissante sur I , on dit qu'elle est **monotone**.

I.3 Fonctions paires, impaires

Définition I.3 On suppose \mathcal{D} symétrique par rapport à 0. Une fonction f , définie sur \mathcal{D} , est dite **paire** si

$$\forall x \in \mathcal{D} : f(-x) = f(x)$$

elle est dite **impaire** si

$$\forall x \in \mathcal{D} : f(-x) = -f(x)$$

Remarque I.2 Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire (resp impaire) alors le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe (Oy) (resp l'origine du repère).

Proposition I.1 Les ensembles des fonctions paires et des fonctions impaires de \mathcal{D} dans \mathbb{C} sont stables par les opérations de $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$.

I.4 Fonctions périodiques

Définition I.4 Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Un réel T est dit une **période** de f si

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x + T) = f(x).$$

f est dite **périodique** si elle admet une période non nulle.

Remarque I.3 Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est T -périodique son graphe est stable par translation de vecteur $T \vec{i}$. On l'étudie donc sur un intervalle de longueur T et on complète en dupliquant le graphe obtenu à \mathbb{R} "tout entier".

Exemples

- (1) Toute fonction constante sur \mathbb{R} est périodique et tout réel en est une période.
- (2) Les fonctions circulaires \cos et \sin sont 2π -périodique, et la fonction \tan est π -périodique.
- (3) La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ est périodique et tout rationnel en est une période.

Propriétés

- (i) La somme (resp le produit) de deux fonctions T -périodique est aussi T -périodique.
- (ii) Si f est T -périodique alors $g \circ f$ est T -périodique pour toute fonction g (telle $\text{Im } f \subset \mathcal{D}_g$).

II Limites et continuité

On rappelle que lorsqu'on parle de limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ de f il faut que f soit définie sur un domaine \mathcal{D} qui soit un intervalle (éventuellement privé d'un nombre fini de point) tel que a en soit un point (éventuellement manquant) ou une extrémité, on dira alors que a est un **point adhérent** à \mathcal{D} . Et pour que f soit continue en a il faut d'abord que f soit définie en a c'est à dire que $a \in \mathcal{D}$.

On suppose dans toute la suite que \mathcal{D} contient un intervalle I ou deux de type suivant :

- $I = [b, a[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
- $I =]a, b]$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On dira qu'une propriété est vraie **au voisinage de a** s'il existe un intervalle I de la forme $[a - \mu, a + \mu]$, ($\mu > 0$) si $a \in \mathbb{R}$, $[b, +\infty[$ si $a = +\infty$ et $] -\infty, b]$ si $a = -\infty$, tel que la propriété en question soit vraie sur $I \cap \mathcal{D}$.

II.1 Définitions – Exemples

Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, a adhérent à \mathcal{D} et $\ell \in \mathbb{C}$.

Définition II.1 On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers a , ou que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - \ell| = 0$, (les deux barres verticales pour le module dans \mathbb{C}), ie :

(1) Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

(2) Si $a = +\infty$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}, x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

(3) Si $a = -\infty$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}, x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Remarque II.1 Dans les définitions ci-dessus le réel ε peut être pris aussi petit que l'on veut, ainsi une condition du type $\varepsilon < 10^{-10}$ est sans "danger".

Exemples

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(ix) = 1$. En effet on a :

$$\begin{aligned} |\exp(ix) - 1| &= |(\cos x - 1) + i \sin x| \\ &= \left| 2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) + i 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right| \\ &= 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| \left| -\sin \frac{x}{2} + i \cos \frac{x}{2} \right| \\ &= 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| \end{aligned}$$

et comme $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \sin \frac{x}{2} \right| = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(ix) = 1$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(ix)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp(ix)}{x} = 0$, car $\left| \frac{\exp(ix)}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$.

Définition II.2 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \mathcal{D}$. On dit que f est continue en $a \in \mathcal{D}$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on a en plus les cas de limites infinies :

Définition II.3 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à \mathcal{D} .

(4) Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$, ou que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D} : |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq A.$$

(5) Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$, ou que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A < 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D} : |x - a| \leq \eta \implies f(x) \leq A.$$

(6) On dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ou que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D} : x \geq B \implies f(x) \geq A.$$

(7) On dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, ou que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A < 0, \exists B > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D} : x \geq B \implies f(x) \leq A.$$

(8) On dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$, ou que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists B < 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D} : x \leq B \implies f(x) \geq A.$$

(9) On dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$, ou que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A < 0, \exists B < 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D} : x \leq B \implies f(x) \leq A.$$

Remarque II.2 Dans les définitions ci-dessus le réel $|A|$ peut être pris aussi grand que l'on veut, ainsi une condition du type $|A| > 10^{10}$ est sans "danger".

Limite à droite et limite à gauche en un point

Il arrive que certaines fonctions ne soient définies que d'un seul côté par rapport à un point a ou qu'elles changent de comportement en passant d'un côté à l'autre du point a , dans ce cas on définit les notions de limite et continuité à gauche et à droite.

Définition II.4 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ et a un point adhérent à \mathcal{D} . On dit que f admet une limite ℓ à droite (respectivement à gauche) de a si la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]a, +\infty[$ (respectivement à $\mathcal{D} \cap]-\infty, a[$) admet ℓ pour limite en a . On écrit $\lim_{a^+} f(x) = \ell$ (respectivement à $\lim_{a^-} f(x) = \ell$).

Définition II.5 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que f est continue à droite (respectivement à gauche) de a si $\lim_{a^+} f(x) = f(a)$ (respectivement à $\lim_{a^-} f(x) = f(a)$).

Proposition II.1 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \mathcal{D}$. f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a .

Preuve: Il suffit d'utiliser les définitions des limites.

Exemples

(1) Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

étudier la continuité de f en 0.

(2) La fonction partie entière $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto E(x)$ n'est pas continue à gauche en tout point $n \in \mathbb{Z}$.

(3) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0 car $\lim_{0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{0^-} f(x) = -\infty$ sont différentes.

Théorème II.1 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ et a un point adhérent à \mathcal{D} . Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

Démonstration de l'unicité dans le cas de limite finie en un point: Pour montrer l'unicité, on suppose que f admet deux limites ℓ et ℓ' en $a \in \mathbb{R}$ tels que $\ell \neq \ell'$. Avec $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3}$, en utilisant le (1) de la Définition II.1 respectivement pour ℓ et ℓ' , il existe μ et μ' tels que pour tout $x \in \mathcal{D}$ vérifiant $|x - a| \leq \eta$ et $|x - a| \leq \eta'$, on ait

$$\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \text{ et } \ell' - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell' + \varepsilon$$

ce qui implique

$$\ell - \varepsilon \leq \ell' + \varepsilon \text{ et } \ell' - \varepsilon \leq \ell + \varepsilon$$

donc

$$\ell - \ell' \leq 2\varepsilon \text{ et } \ell' - \ell \leq 2\varepsilon$$

ce qui est absurde.

II.2 Propriétés

On résume les propriétés sur les opérations dans le tableau suivant où on a posé $\lim_a f = l, \lim_a g = l'$.

Fonction	Hypothèses sur f et g	Conclusion
$f + g$	$l, l' \in \mathbb{C}$	$\lim_a (f + g) = l + l'$
	f et g réelles, f minorée au voisinage de a et $l' = +\infty$	$\lim_a (f + g) = +\infty$
	f et g réelles, f majorée au voisinage de a et $l' = -\infty$	$\lim_a (f + g) = -\infty$
fg	$l, l' \in \mathbb{C}$	$\lim_a (fg) = ll'$
	f et g réelles, f minorée au voisinage de a par $\alpha > 0$ et $l' = \pm\infty$	$\lim_a (fg) = l = \pm\infty$
	f et g réelles, f majorée au voisinage de a par $\beta < 0$ et $l' = \pm\infty$	$\lim_a (fg) = -l' = \mp\infty$
	f bornée et $l' = 0$	$\lim_a (fg) = 0$
$\frac{1}{f}$	$l \neq 0$	$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{l}$
	f réelle, $f > 0$ au voisinage de a et $l = 0$	$\lim_a \frac{1}{f} = +\infty$
	f réelle, $f < 0$ au voisinage de a et $l = 0$	$\lim_a \frac{1}{f} = -\infty$
	f réelle, $l = \pm\infty$	$\lim_a \frac{1}{f} = 0.$

Exercice II.1 Montrer les propriétés ci-dessus en utilisant la définition de la limite.

Remarque II.3 En particulier la somme, le produit et le quotient de fonctions continues en un point a est continu.

On déduit en particulier les limites de fonctions polynômes et rationnelles (connues) en $\pm\infty$.

En plus des propriétés ci-dessus, on a :

Proposition II.2 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ et a un point adhérent à \mathcal{D} . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \bar{f}(x) = \bar{\ell}$ et $\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |\ell|$.

Preuve: La faire en utilisant la définition de la limite, puis en utilisant la **Théorème II.2** ci-dessous.

Le résultat suivant ramène l'étude d'une limite de fonction complexe à l'étude des limites de deux fonctions réelles :

Théorème II.2 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ et a un point adhérent à \mathcal{D} . $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im}(\ell) \end{cases}$$

En particulier f est continue en a ssi $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

Preuve: Si $f(x) = u(x) + iv(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell = \alpha + i\beta$ alors $\bar{f}(x) = u(x) - iv(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \bar{\ell} = \alpha - i\beta$, donc

$$u(x) = \frac{1}{2} (f(x) + \bar{f}(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{2} (\ell + \bar{\ell}) = \alpha \text{ et } v(x) = \frac{1}{2i} (f(x) - \bar{f}(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{2i} (\ell - \bar{\ell}) = \beta.$$

Réciproquement, si $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha$ et $v(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \beta$ alors $f(x) = u(x) + iv(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha + i\beta = \ell$.

Exemples

- (1) La fonction $x \mapsto e^{ix}$ est continue sur \mathbb{R} .
- (2) la fonction $x \mapsto \frac{e^{ix}}{x}$ n'a pas de limite en 0. (Démontrer le ..).

Théorème II.3 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ et a un point adhérent à \mathcal{D} . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{C}$) alors f est bornée au voisinage de a .

Théorème II.4 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à \mathcal{D} . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \neq 0$ alors f est de même signe que l au voisinage de a .

Exercice II.2 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à \mathcal{D} , telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l > m$. Montrer que $f(x) \geq m$ sur un voisinage de a .

II.3 Propriétés avec la relation d'ordre

Dans le cas de fonctions réelles (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}), on a :

Théorème II.5 Si $f \leq g$ au voisinage de a et si $\lim_a f$ et $\lim_a g$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ alors $\lim_a f \leq \lim_a g$.

Théorème II.6 Si $|f(x) - \ell| \leq \theta(x)$ au voisinage de a et si $\lim_a \theta(x) = 0$, alors $\lim_a f(x) = \ell$.

Théorème II.7 Si $\alpha \leq f \leq \beta$ au voisinage de a et si $\lim_a \alpha(x) = \lim_a \beta(x) = \ell$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ alors $\lim_a f(x) = \ell$.

Théorème II.8 Si $f \leq g$ au voisinage de a et si $\lim_a g(x) = +\infty$ alors $\lim_a f(x) = +\infty$.

Exercice II.3 Démontrer les théorèmes précédent dans le cas $a \in \mathbb{R}$.

II.4 Composition des limites

Théorème II.9 Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ et $g : \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{C}$, et soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ tels que $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = \ell$ alors $\lim_a g \circ f = \ell$. En particulier la composée de fonctions continues est continue.

Preuve: Distinguer les cas a et b réels ou infinis.

Exemples

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0$.
- (2) Chaque fonction rationnelle est continue sur son \mathcal{D}_f .
- (3) Si f est continue, $|f|$ est continue.
- (4) Si f est continue positive alors \sqrt{f} est continue.

II.5 Fonctions continues sur un intervalle

Définition II.6 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est continue sur I si elle l'est en tout point de I (si I n'est pas ouvert, la continuité sur I comprend la $\frac{1}{2}$ -continuité aux extrémités).

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans \mathbb{C} .

Proposition II.3 Si f est continue alors $|f|$ et \bar{f} sont aussi continue.

Proposition II.4 L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur I à valeur dans \mathbb{C} est stable pour les lois usuelles.

Remarques

- (1) Si f est continue sur $[a, b]$ et $[b, c]$ alors f est continue sur $[a, c]$.
- (2) Si f est continue sur I et $J \subset I$ alors f est continue sur J .

Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème II.10 (Théorème des Valeurs Intermédiaires) Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. L'image $f(I)$ est un intervalle.

En particulier si $a < b \in I$ tels que $f(a)f(b) < 0$ il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Preuve: En seconde période.

Théorème II.11 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervalle de \mathbb{R} , f continue et strictement monotone, alors $f : I \longrightarrow J = f(I)$ est bijective, et l'application $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et de même sens de monotonie que f .

Preuve: En seconde période.

Remarque II.4 Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite ($y = x$).

III Dérivées

III.1 Définitions - Exemples

Définition III.1 Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \mathcal{D}$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans \mathbb{R} . On note alors $f'(a)$ cette limite, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Le réel $f'(a)$ est appelé le nombre dérivé de f en a .

Remarque III.1 Cela suppose donc que a est un point intérieur \mathcal{D} .

Définition III.2 Si f est dérivable en tout point de \mathcal{D} , on dit que f est dérivable sur \mathcal{D} et la fonction

$$f' : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}; x \longmapsto f'(x)$$

est la fonction dérivée de f sur \mathcal{D} .

Définition III.3 (Dérivée à droite et à gauche) On dit que f est dérivable à gauche (resp à droite) en a si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite à gauche (resp à droite) en a . On note alors $f'_g(a)$ (resp $f'_d(a)$) cette limite. On a donc :

$$f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ et } f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Remarque III.2 Si f est dérivable en a alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a) \underbrace{\left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right\}}_{= \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0}$$

On peut donc approcher, au voisinage de a la quantité $f(x)$ par l'expression affine $f(a) + f'(a)(x - a)$.

Le résultat suivant ramène l'étude et le calcul des dérivées de fonctions à valeur complexe aux fonctions à valeur réelle.

Théorème III.1 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}, a \in \mathcal{D}$. f est dérivable en a si et seulement si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont et on a alors

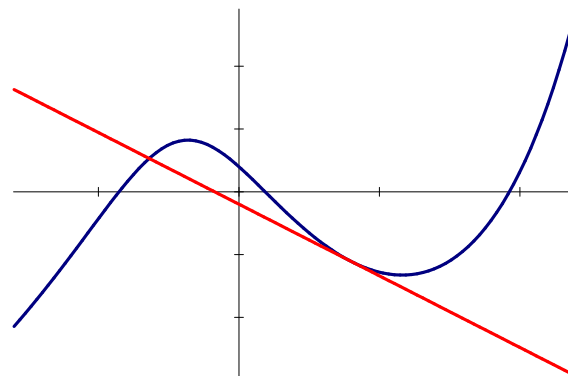
$$f'(x) = (\text{Re } f)'(a) + i(\text{Im } f)'(a).$$

Preuve: Application du **Théorème II.2**.

Exemples

- (1) La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.
- (2) $f : x \mapsto ax + b; f'(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (3) $f : t \mapsto e^{ix}; f'(t) = ie^{ix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (4) Les fonctions polynômiales se dérivent de la même manière.

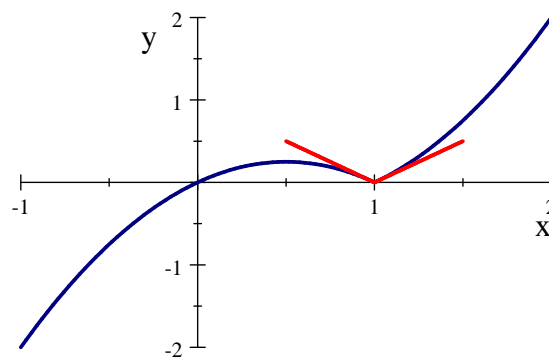
Définition III.4 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathcal{D}$. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée la tangente de f au point d'abscisse a .



Tangente à une courbe

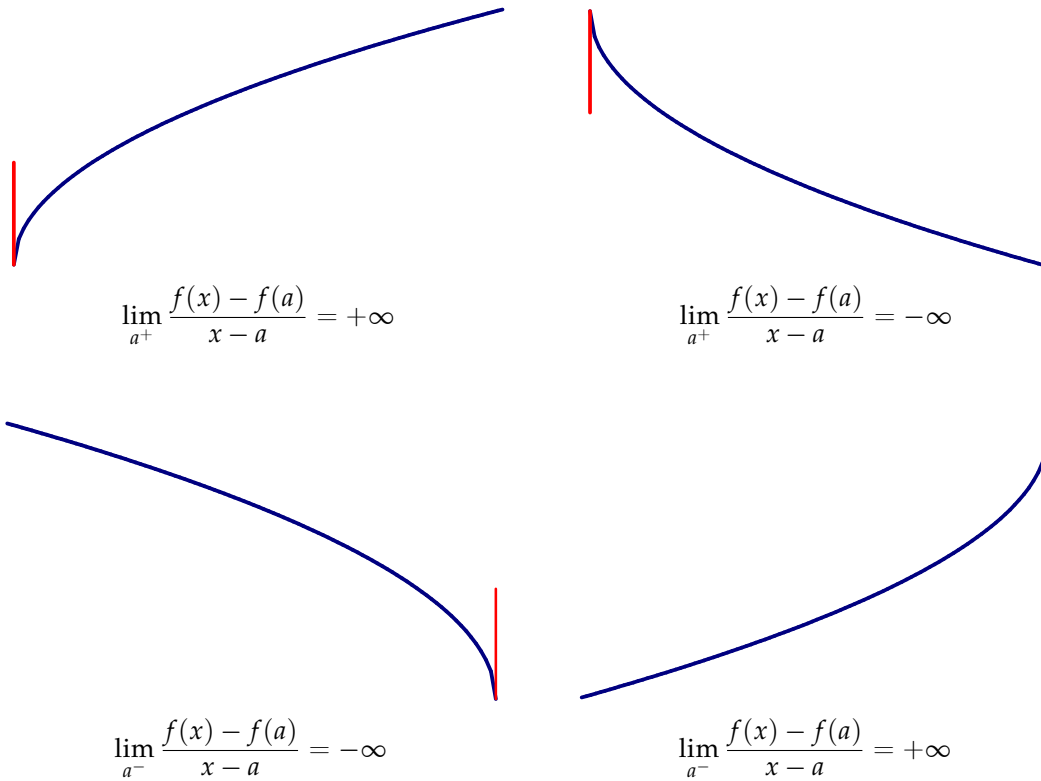
Remarque III.3 Si la fonction f est dérivable à gauche (resp à droite), on parle de demi-tangente.

Exemple III.1 $f(x) = x|x - 1|$ en $a = 1$. On a $f'_d(1) = 1$ et $f'_g(1) = -1$.



Point anguleux

Remarque III.4 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}$. Si la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ à droite et/ou à gauche en a la courbe admet une tangente ou demi-tangente verticale.



III.2 Propriétés

Théorème III.2 Si f est dérivable en a alors elle est continue en a .

Remarque III.5 La réciproque est fautive. $x \mapsto |x|$ en 0.

Théorème III.3 (CN d'extrémum) Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. Alors f admet un extrémum en a si et seulement si $f'(a) = 0$.

Remarque III.6 La réciproque est fautive. $x \mapsto x^3$ en 0.

Remarque III.7 a n'est pas une extrémité de I .

III.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Somme

si f et g sont dérivables sur I alors $f + g$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I : (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Produit

si f et g sont dérivables sur I alors $f \times g$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I : (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Quotient

si f et g sont dérivables sur I et g ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I : \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	D_f
$x^m; m \in \mathbb{N}$	mx^{m-1}	\mathbb{R}
$e^{ax}, a \in \mathbb{C}$	ae^{ax}	\mathbb{R}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}_+^*
$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}
$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Application réciproque

Soit $f : I \rightarrow J$ bijective, dérivable sur I , alors en tout point $y = f(x) \in J$ tel que $f'(x)$ n'est pas nulle, on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemples (réciproques des fonctions circulaires)

$f(x)$	$f'(x)$	D_f et $D_{f'}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$ et $]-1, 1[$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$ et $]-1, 1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}

Composée d'applications

Si f est dérivable sur I et g dérivable sur $J \supset f(I)$ ($g : J \rightarrow \mathbb{C}$) alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I : (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

Preuve: On pose $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a)$ et $g(y) = g(f(a)) + \psi(y)(y - f(a))$.
Donc $g(f(x)) = g(f(a)) + \psi(f(x))(f(x) - f(a)) = g(f(a)) + \underbrace{\psi(f(x))\varphi(x)}_{\Phi(x)}(x - a)$

Φ étant continue en a donc $g \circ f$ est dérivable en a et on a :
 $(g \circ f)'(a) = \psi(f(a))\varphi(a) = g'(f(a))f'(a).$

Dérivées de fonctions usuelles La propriété ci-dessus permet de dériver les fonctions suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$	D_f et $D_{f'}$
$x^r, r \in \mathbb{R}_+^*$	rx^{r-1}	\mathbb{R}_+^*
$\ln u(x) , u(x) \neq 0$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	D_u et $D_{u'}$
$e^{u(x)}, u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$	$u'(x)e^{u(x)}$	D_u et $D_{u'}$

III.4 Dérivées successives

Définition III.5 On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est n fois dérivable ($n \in \mathbb{N}^*$), s'il existent f_0, f_1, \dots, f_n telles que $f_0 = f$ et $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket f_i$ est dérivable sur I et $f'_i = f_{i+1}$.

On note alors $f^{(n)}$ la fonction f_n et on l'appelle la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur I .

On convient que $f^{(0)} = f$. On note les premières dérivées par f', f'', f''' .

Exemples

$$(1) (x^m)^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & \text{si } n \leq m, \\ 0 & \text{si } n > m. \end{cases}$$

$$(2) (e^x)^{(n)} = e^x \text{ pour tout } n.$$

$$(3) \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Proposition III.1 L'ensemble $D^n(I, \mathbb{C})$ des fonctions n fois dérivables sur I est stable par addition et multiplication des applications. Et on a pour tout f, g dans $D^n(I, \mathbb{C})$:

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

Pour la multiplication on a la formule de **Leibniz** suivante :

Théorème III.4 (Formule de Leibniz) Si $f, g \in D^n(I, \mathbb{R})$ alors $fg \in D^n(I, \mathbb{R})$ et on a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^n \mathbb{C}_n^p f^{(p)} g^{(n-p)}.$$

Preuve: Par récurrence sur n . Elle en tout point semblable à cette la formule du binome de Newton dans un anneau.

Fonctions convexes

Définition III.6 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I , on dit que f est convexe (resp concave) sur I si $f'' \geq 0$ (resp $f'' \leq 0$) sur I .

Remarque III.8 Si f est convexe $-f$ est concave et réciproquement.

Définition III.7 Un point où la fonction change de concavité est dit **point d'inflexion** de la courbe de f .

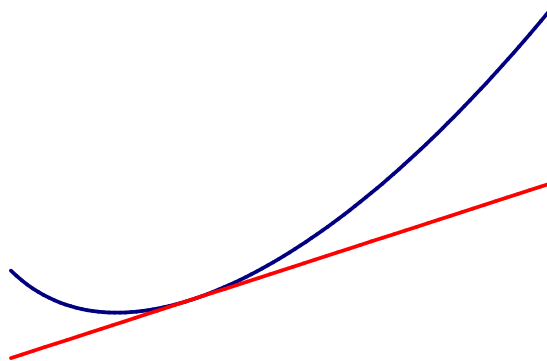
Remarque III.9 Un point d'inflexion est un point où la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe.

Exemple III.2 $f(x) = x^3$. et $f(x) = x^4$.

Théorème III.5 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et convexe sur I (I intervalle) alors on a

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Remarque III.10 Le théorème précédent exprime le fait que le graphe d'une fonction convexe est situé au dessus de ses tangentes. Et donc une fonction concave est au dessous de ces tangentes.



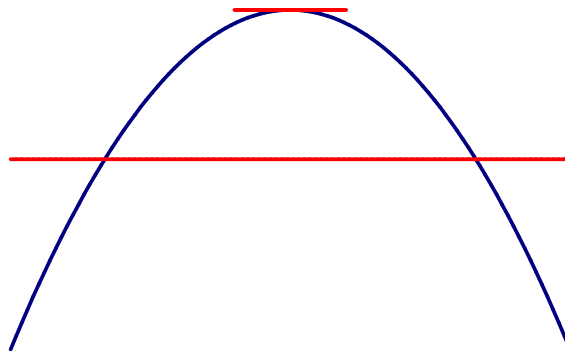
Fonction convexe. La courbe est au dessus de ses tangentes

III.5 Etude globale des fonctions dérivables

Théorème de Rolle¹

Théorème III.6 Soit $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve: En seconde période



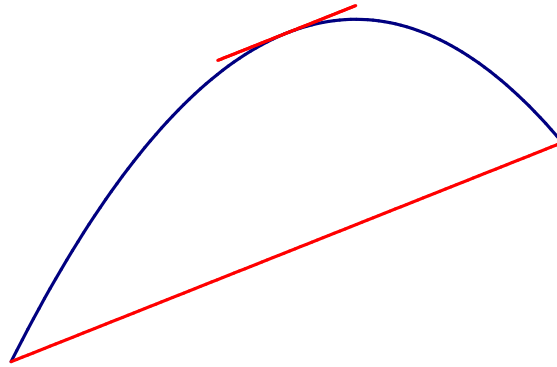
Théorèmes des accroissements finis

Théorème III.7 Soit $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Preuve: On utilise le théorème de Rolle avec la fonction :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

¹Français. 1652-1719.



Théorème III.8 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I dérivable sur $I \setminus \{a\}$ ($a \in I$). Si f' admet une limite ℓ en a (resp à droite ou à gauche en a) alors f est dérivable en a (resp à droite ou à gauche en a) et on a

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell.$$

Preuve: On a $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$ avec $c_x \in]a, x[$. Donc quand x tend vers a , c_x aussi tend vers a et donc d'après la composition des limites on a, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$.

Exemple III.3 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On montre que $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout n et donc $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$, donc f est C^∞ sur \mathbb{R} .

Exemple III.4 (f dérivable en un point sans que f' admette de limite en ce point) Avec

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a $f'(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas.

Théorème III.9 Soit I un intervalle et Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I , alors on a :

- (1) f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I .
- (2) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I .
- (3) f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I .

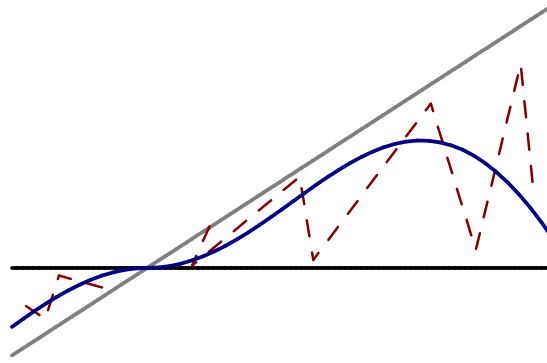
Preuve: Utilise le T.A.F.

Remarque III.11 Si $f' > 0$ (resp $f' < 0$) sur I sauf peut être en un nombre fini de points où elle est nulle alors f est strictement croissante (resp strictement décroissante).

Inégalité des Accroissements finis

Théorème III.10 Soit $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. Si $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$.

Interprétation géométrique



$m \leq f' \leq M$. La courbe est située entre les deux droites $y = b + M(x - a)$ et $y = b + m(x - a)$.

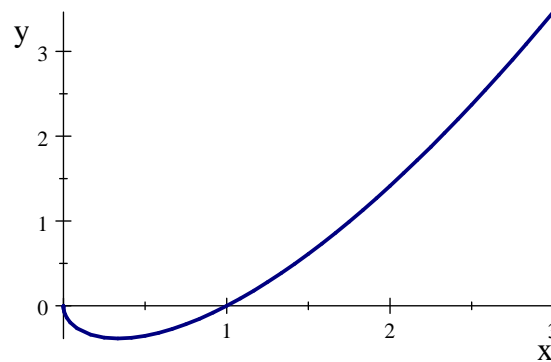
Plan d'étude d'une fonction

On étudie la fonction $f : x \mapsto (x - 1)\sqrt{x}$.

- (1) Domaine de définition. $D_f = \mathbb{R}_+$.
- (2) Continuité et limites. f est continue sur D_f et on a $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$.
- (3) Dérivabilité et variations. f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{3x - 1}{\sqrt{x}}$. D'où le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
f'		-	+
f	0	\searrow	\nearrow
		$\frac{-2}{3\sqrt{3}}$	$+\infty$

- (4) Branches infinies. On a $\lim_{+\infty} f = +\infty$, on examine $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Donc f admet une B.P.D.A l'axe (Oy).
- (5) Représentation graphique.



$$f(x) = (x - 1)\sqrt{x}.$$

Etude de suites récurrentes

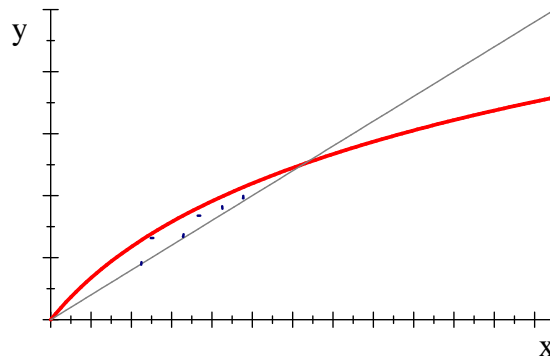
On étudie la suite

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n). \end{cases}$$

Avec $f(x) = \ln(1 + 2x)$ et $f'(x) = \frac{2}{1 + 2x}$, on a $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}, \forall x \geq 1$, donc on a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &\leq \frac{2}{3} |u_n - \ell| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 |u_{n-1} - \ell| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |u_0 - \ell|. \end{aligned}$$

Où ℓ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.



IV Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles sont connues. On rappelle les définitions des fonctions réciproques des fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques et leurs réciproques.

IV.1 Fonctions hyperboliques

On définit les fonctions sinh, cosh et tanh (respectivement sinus, cosinus et tangente hyperbolique) par :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

sinh est impaire et cosh est paire et on a les relations suivantes :

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad e^x = \cosh(x) + \sinh(x).$
- $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ et $(\cosh(x))' = \sinh(x).$

Remarque IV.1 le paramétrage $\begin{cases} x(t) = \cosh(t) \\ y(t) = \sinh(t) \end{cases}$, permet de décrire la branche d'abscisse positive de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$, ce qui justifie l'appellation "hyperbolique".

Exercice IV.1 Construire les graphes des fonctions précédentes.

IV.2 Réciproques des fonctions hyperboliques

arcsinh

sinh est continue strictement croissante de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . Elle admet donc une réciproque, notée arcsinh (pour argument du sinus hyperbolique), qu'on peut calculer explicitement :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : y = \operatorname{arcsinh}(x) \iff x = \sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

D'où : $e^{2y} - 2e^y x - 1 = 0$ donc $e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$.

La seule racine positive est $x + \sqrt{x^2 + 1}$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{arcsinh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

– $\operatorname{arcsinh}$ est dérivable sur \mathbb{R} et on a : $\operatorname{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

arccosh

\cosh est continue strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$. Elle admet donc une réciproque, notée $\operatorname{arccosh}$ (pour argument du cosinus hyperbolique), qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[\times [1, +\infty[: y = \operatorname{arccosh}(x) \iff x = \cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

On vérifie que :

$$\forall x \in [1, +\infty[: \operatorname{arccosh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

– $\operatorname{arccosh}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et on a : $\operatorname{arccosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

arctanh

On définit de la même façon la fonction $\operatorname{arctanh}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[: y = \operatorname{arctanh}(x) \iff x = \tanh(y).$$

Et que

$$\forall x \in]-1, 1[: \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

– $\operatorname{arctanh}$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a : $\operatorname{arctanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Exercice IV.2 Représenter graphiquement les fonctions précédentes.

IV.3 Réciproques des fonctions circulaires

On définit les fonctions réciproques des fonctions circulaires par les relations suivantes :

$$\forall (x, \theta) \in [-1, 1] \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[: \operatorname{arcsin}(x) = \theta \iff x = \sin(\theta).$$

$$\forall (x, \theta) \in [-1, 1] \times [0, \pi] : \operatorname{arccos}(x) = \theta \iff x = \cos(\theta).$$

$$\forall (x, \theta) \in \mathbb{R} \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[: \operatorname{arctan}(x) = \theta \iff x = \tan(\theta).$$

On vérifie les propriétés suivantes :

– Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1, 1[$ et on a :

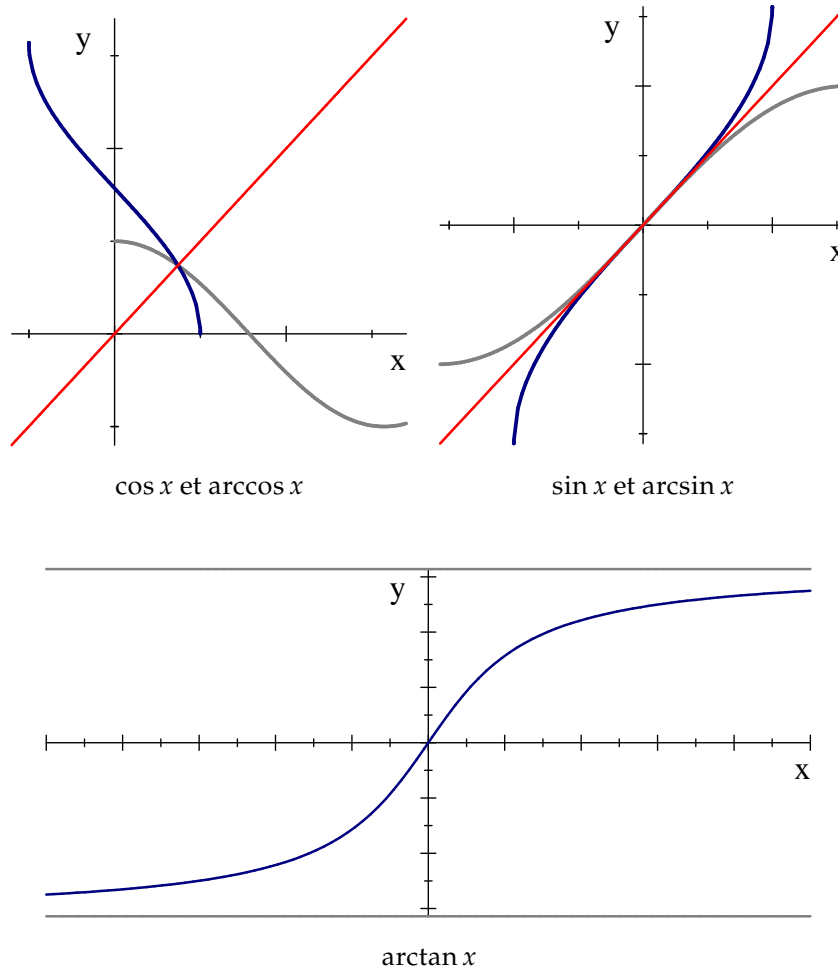
$$\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \operatorname{arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

– $\forall x \in]-1, 1[: \operatorname{arccos}(x) + \operatorname{arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$.

– La fonction arctan est dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

– la formule $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$ est utile.



V Développements limités

V.1 Définitions – Exemples

Dans toute la suite $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I .

Définition V.1 On dit que f admet un développement limité (D.L), à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$), en x_0 s'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) - \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k = (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On écrit alors $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ (quand $x \rightarrow x_0$). On dira que le polynôme $F(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$ est la partie régulière et $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ le reste du développement limité.

Définition V.2 Si $I =]a, +\infty[$, on dit que f admet un développement limité généralisé (ou développement asymptotique), à l'ordre n , en $+\infty$ s'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^n} \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemples

- (1) Donner le DL de $f(x) = 1 + x - 2x^2$ en 0 à l'ordre 1 puis 2 puis 3. Que dire des fonctions polynômiales en 0? et en tout point?
- (2) Donner le DL de $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ en 0 à l'ordre 2. Est ce que f admet un DL en 0 à l'ordre 3?
- (3) Donner le DL de $f(x) = e^{-1/x^2}$ en 0 à l'ordre 3.
- (4) Donner le DL de $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en 0 à l'ordre 3.
- (5) La limite usuelle $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, donne :

$$\sin x = x + x\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

qui est un DL en 0 à l'ordre 1 de la fonction sin .

- (6) La limite usuelle $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$, donne :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

qui est un DL en 0 à l'ordre 2 de la fonction cos .

Propriétés

- (1) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0$ alors f admet un DL à l'ordre 0 et réciproquement. Dans ce cas

$$f(x) = a_0 + \varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

- (2) Si f admet un DL d'ordre 1 en x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

alors f admet a_0 comme limite en x_0 (i.e f est continue en x_0) et f dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = a_1$.

Question : Si f admet un DL à l'ordre 2 est ce qu'elle est 2 fois dérivable? Pas nécessairement. Par exemple la fonction $f : x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ admet un DL en 0 à l'ordre 2 car $f(x) = x^2\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, mais elle n'est pas deux fois dérivable en 0 (déjà vue).

Remarque V.1 Par un changement de variables $h = x - x_0$ ou $h = \frac{1}{x}$ on peut toujours se ramener au cas où $x_0 = 0$.

V.2 Propriétés

Théorème V.1 Si f possède un DL_n en x_0 alors il est unique dans le sens suivant.

$$\text{Si } f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon_1(x) = \sum_{k=0}^n b_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon_2(x)$$

Alors $a_k = b_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Preuve: Utilise l'unicité de la limite. Remarquer que

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad a_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0}, \quad a_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

ce qui permet de montrer l'unicité des a_k par récurrence.

Théorème V.2 Si f admet un DL à l'ordre n , alors elle admet un DL à tout ordre $p \leq n$ dont la partie régulière est déduite par **troncation**.

Preuve: Par troncation on entend le polynôme obtenu à partir d'un autre en éliminant des termes de degré supérieur à p .

Théorème V.3 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, ($0 \in I$) admettant un DL : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$, en 0,

- (i) Si f est paire alors $a_k = 0$ pour tout k impair.
- (ii) Si f est impaire alors $a_k = 0$ pour tout k pair.

Preuve: Découle de l'unicité d'un DL. Si f est paire alors les fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(-x)$ sont égales, donc leurs DL sont égaux.

V.3 D.L de fonctions usuelles

On admet les DL en 0 des fonctions usuelles pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$.
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$.
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$.
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$.
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$.
- $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$.
- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$.

à apprendre par coeur. Justification en seconde période.

V.4 Règles de calcul des D.L

Somme et produit

Si deux fonctions f et g admettent les DL $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$ en x_0 à l'ordre n , alors

- $(f+g)$ admet un DL en x_0 à l'ordre n , et $(f+g)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$.
- (fg) admet un DL en x_0 à l'ordre n : $(fg)(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$. les c_k sont obtenus en effectuant le produit $\sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k \sum_{k=0}^n b_k (x-x_0)^k$ et en ne gardant que les termes de degré $\leq n$.

Composée de deux fonctions

Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$ avec $a_0 = 0$ (i.e $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$) et $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + x^n \varepsilon(x)$, alors

$$(g \circ f)(x) = \sum_{k=0}^n d_k x^k + x^n \varepsilon(x).$$

les d_k sont obtenus en effectuant la composée $\sum_{j=0}^n b_j \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^j$ et en ne gardant que les termes de degré $\leq n$.

Inverse d'un DL

On suppose que $f(x) = 1 - u(x)$ avec $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Si $u(x)$ possède un DL en 0 à l'ordre n

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i + x^n \varepsilon(x)$$

alors

$$\frac{1}{1 - u(x)}$$

admet un DL à l'ordre n obtenu en effectuant la composée

$$1 + \sum_{i=1}^n a_i x^i + \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right)^2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right)^n$$

et en ne gardant que les termes de degré $\leq n$.

Exemples

(1) DL à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

Réponse: On trouve $\frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

(2) DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$.

Réponse: On trouve $\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

(3) DL en 0 à l'ordre 2 de $\tan x$.

Réponse: On a $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + x^8\varepsilon(x)$

Exercice V.1 DL en 0 à l'ordre 7 de $\ln(\cos x)$.

Réponse: On trouve $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + x^7\varepsilon(x)$

Exercice V.2 DL en 0 à l'ordre 3 dans chacun des cas suivant :

1. $f(x) = \cosh(\ln(1+x))$.
2. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x}$.
3. $f(x) = \frac{\sin x \sinh x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Réponse: on trouve :

1. $\cosh(\ln(1+x)) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.
2. $\frac{\ln(1+x)}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{12}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.
3. $\frac{\sin x \sinh x}{\sqrt{1-x^2}} = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + x^5\varepsilon(x)$.

Les calculs sont fait à l'aide de Maple.

VI Primitives et intégrales

VI.1 Définitions-Exemples

Définition VI.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on dit que $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f sur I si F est dérivable et $F' = f$. On définit l'intégrale de f entre deux points a et b de I , comme étant le complexe :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \text{ qu'on note } [F(t)]_a^b.$$

Remarque VI.1 Grâce aux propriétés de la dérivabilité, si $f = g + ih$ et si G et H désignent des primitives respectives de g et h alors $G + iH$ est une primitive de f , donc

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt.$$

Exemple VI.1 $\int_0^\pi e^{it}dt = \frac{1}{i} [e^{it}]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{i} [e^{i\pi} - 1] = -\frac{2}{i} = 2i.$

Théorème VI.1 Si $a \in I$ et f continue sur I , la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a . Si F est une primitive de f sur I , alors les primitives de f sur I sont les fonctions $F + c$, $c \in \mathbb{C}$.

Remarque VI.2 On écrit aussi $\int f(t)dt$ sans les bornes pour désigner toute primitive de f .

Théorème VI.2 Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe \mathcal{C}^1 , alors pour tout $x \in I$: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$

VI.2 Propriétés

Des propriétés sur la dérivabilité, on déduit les propriétés suivantes :

1. Linéarité et relation de Chasles

- $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$
- $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$
- $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt.$
- $\int_a^b \overline{f(t)}dt = \overline{\int_a^b f(t)dt}.$

2. Inégalités

- Si f et g sont réelles telles que $f \leq g$ sur I et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$
- $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$
- Si $a \leq b$ alors $\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \int_a^b |g(t)|dt.$
- $\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$, dans le cas de fonctions complexes, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit plutôt :

$$\left| \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Avec égalité si et seulement si f et g sont \mathbb{C} -proportionnelles.

VI.3 Calcul d'intégrales

Intégration par parties

Théorème VI.3 Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ et $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Preuve: Vient de la formule de dérivation du produit fg ...

Remarque VI.3 La formule d'intégration par parties s'écrit aussi pour les primitives :

$$\int f(t)g'(t)dt = f(x)g(x) - \int f'(t)g(t)dt.$$

Exemples

- (1) $\int \ln(x)dx$. En posant $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x$, on trouve $\int \ln(x) = x \ln x - x$.
- (2) $\int \arctan(x)dx$. En posant $f(x) = \arctan x$ et $g(x) = x$, on trouve $\int \arctan(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$.

Intégration par changement de variable

Théorème VI.4 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, g de classe \mathcal{C}^1 sur $J = f(I)$ à valeur dans \mathbb{C} , et $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

Preuve: Vient de la formule de dérivation de la composée $f \circ g$...

Remarque VI.4 Pratiquement on pose $x = g(t)$ et $dx = g'(t)dt$ et on remplace les bornes a et b par $g(a)$ et $g(b)$. Cette formule est utilisée dans les deux sens.

Exemples

- (1) $I = \int_0^{\pi/2} \sin^3(t)dt$. En posant $x = \cos t$ et $dx = -\sin(t)dt$, on trouve

$$I = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \sin(t)dt = \int_1^0 (1 - x^2)dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^0 = \frac{2}{3}.$$

- (2) $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. On utilise la formule à l'envers, avec $x = \sin t$ et $dx = \cos(t)dt$ et les bornes 0 et $\pi/2$.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

VI.4 Primitives de fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Ensemble de définition
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	\mathbb{R}
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	\mathbb{R}_+^*
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\ln x$	$x \ln x - x$	\mathbb{R}_+^*
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	\mathbb{R}
$1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$
$1 + \cotan^2 x$	$-\cotan x$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$] -1, 1[$
shx	chx	\mathbb{R}
chx	shx	\mathbb{R}
$1 - th^2 x$	thx	\mathbb{R}
$\coth^2 x - 1$	$-\coth x$	\mathbb{R}^*
thx	$\ln(chx)$	\mathbb{R}
$\coth x$	$\ln shx $	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2-1} = \operatorname{argch}(x), x \geq 1$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$