Nombres complexes

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Sommaire

I Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes:

I.1 Définitions

On munit $\mathbb{R}^2$ de deux l.c.i

1. Addition: $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$
   $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$
2. Multiplication: $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$
   $(x,y).(x',y') = (xx' - yy', x'y + xy')$
   On vérifie facilement qu'on a le théorème suivant

Théorème I.1 Muni des l.c.i ci dessus $\mathbb{R}^2$ a une structure de corps, son élément neutre est $0 = (0,0)$, et son élément unité et $1_{\mathbb{C}} = (1,0)$.

Définition 1 Le corps ainsi obtenue est appelé corps des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

Définition 2 On note i le complexe $(0,1)$ et on a $i^2 = -1_{\mathbb{C}} = -(1,0)$.

On définit Sur $\mathbb{C}$ la loi externe par : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall z = (x,y) \in \mathbb{C} : \lambda z = (\lambda x, \lambda y)$.
On définit le morphisme de corps:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

c.à.d φ vérifie les propriétés:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x+x') & = & (x+x',0) = (x,0) + (x',0) \\ \varphi(x.x') & = & (x.x',0) = (x,0).(x',0) \end{array}$$

En plus φ est injectif. Donc $\mathbb{R}$ est un isomorphe à $\mathrm{Im}(\varphi)$ (qui est un sous corps de $\mathbb{C}$), on identifie alors $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}.1$, et on dira que $\mathbb{R}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), on fera donc les identifications suivantes:

$$(x,0) \equiv x, \ (1,0) \equiv 1, \ i^2 \equiv -1 \text{ et } (x,y) = x + iy.$$

L'écriture $z = x + y.i$ est appelée la *forme algébrique* de z, x est la partie réelle et y la partie imaginaire de z. On note $\mathrm{Re}(z) = x$ et $\mathrm{Im}(z) = y$. On a donc:

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R} : x + iy = x' + iy' \Longleftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

I.2 Conjugaison dans $\mathbb{C}$

On appelle conjugué de $z = x + iy$, le complexe noté $\bar{z} = x - iy$. L'application

$$\begin{array}{rcl} s : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{array}$$

vérifie $s \circ s = Id_{\mathbb{C}}$.

Propriétés

On vérifie sans peine ces propriétés

1. L'application s est un morphisme de corps: $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \bar{z}.\overline{z'}$
2. $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{(\bar{z})} = z$.

Remarque 1 En particulier si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\lambda.z} = \lambda.\bar{z}$

I.3 Module d'un complexe

Définition 3 On appelle module d'un nombre complexe $z = x + iy$ le réel positif ou nul

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Remarque 2 Visiblement $|\bar{z}| = |z|$ et pour les réels le module coïncide avec la valeur absolue.

Propriétés

1. $\forall z \in \mathbb{C} : |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\forall z \in \mathbb{C}$ on a $|\lambda z| = \lambda \, |z|$. En général:
$$\forall z, z' \in \mathbb{C} : \left|zz'\right| = |z| \left|z'\right| .$$
3. $\forall z, z' \in \mathbb{C} : |z + z'| \le |z| + |z'|$. Avec égalité si et seulement si z et z' sont $\mathbb{R}_+ -$ *liés*.
   On a aussi les propriétés suivantes, pour tout z, z' dans $\mathbb{C}$:
4. $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \le |z|$.
5. $||z| - |z'|| \le |z - z'|$.
6. $z\bar{z} = |z|^2$ et si $z \neq 0 : \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

I.4 Racines carées d'un complexe

Du fait que $i^2 = -1$, alors -1 admet deux racines carées dans $\mathbb{C}$, i et $-i$.

Théorème I.2 soit $a \in \mathbb{C}^*$, il existe exactement deux complexes solutions de l'équation $z^2 = a$ (qui sont opposés), si $a \in \mathbb{R}_-^*$ ces deux racines (complexes) sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Preuve: Si $a = u + iv$ on pose $z = x + iy$ tel que $z^2 = a$ ce qui donne:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases}$$

et dans la pratique, on ajoute la condition $|a| = |z|^2$, ce qui donne

$$x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Equation algébrique de deuxième degré dans $\mathbb{C}$

Pour résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On pose

$$\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}, \text{ et } \delta \text{ désigne la racine de } \Delta \text{ dans } \mathbb{C}$$

Les racines sont les deux complexes:

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$, s'appele le discriminant de l'équation.

Remarque 3 Dans $\mathbb{C}$ on a un résultat plus fort : "toute fonction polynomial de degré ≥ 1, possède au moins une racine", on dit alors que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos.

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

II Nombres complexes de module 1:

II.1 Le groupe des complexes de module 1

Théorème II.1 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

Remarque 4 Tout complexe $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit de manière unique comme produit d'un réel > 0 ($|z|$) et d'un complexe de module 1 $\left(\frac{Z}{|Z|}\right)$.

II.2 Argument d'un complexe:

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle argument de z, tout réel θ vérifiant

$$z = |z| \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta)\right) \tag{1}$$

l'unique $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$ vérifiant (1) est dit l'argument principale de z, les autres arguments θ sont alors de la forme $\theta = \theta_0 + 2k\pi$. On écrit alors

$$\theta \equiv \theta_0 \, [2\pi]$$

qu'on lit θ congru à θ_0 modulo 2π, ce qui veut dire que si θ et θ' verifient (1) alors $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Exemple 2 $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$ $\arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$ $\arg(i) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

La notation $e^{i\theta}$

On pose pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}.$$

En génerale $z = |z| \, .e^{i\theta}$ ou θ est un argument de z

Exemple 3 $1 = e^{i0}$, $-1 = e^{i\pi}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. En général $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$.

Proposition 1 Deux complexes $z = re^{i\theta}$et $z' = r'e^{i\theta'}$ sont égaux ssi $\left\{ \begin{array}{c} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \, [2\pi] \end{array} \right\}$

Les formules trigonometriques:

$$\begin{aligned} \cos\left(\theta + \theta'\right) &= \cos(\theta)\cos\left(\theta'\right) - \sin(\theta)\sin\left(\theta'\right) \\ \sin\left(\theta + \theta'\right) &= \cos(\theta)\sin\left(\theta'\right) + \sin(\theta)\cos\left(\theta'\right) \end{aligned}$$

donnent

$$e^{i\left(\theta+\theta'\right)} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$$

ce qui permet à cette nouvelle notation de prolonger la définition de l'exponentiel réel.

Formules d'EULER

On a les formules d'EULER qui permettent d'écrire les fonctions sinus et cosinus à l'aide de l'exponentiel:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Concéquences

1. **Formule de MOIVRE:**
   $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = (\cos(n.\theta) + i\sin(n.\theta))$
   En particulier cette formule donne $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
2. **Linéarisation**
   C'est l'opération inverse de la précédente. Il s'agit d'écrire $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)$,...$\cos(n\theta)$ et $\sin(\theta)$, $\sin(2\theta)$, ... $\sin(n\theta)$.

Exemple 4 pour $n = 2$ et $n = 3$.

Remarque 5 On peut aussi utiliser les expressions $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ et le binôme de NEWTON et on aura:

$$\begin{aligned}
\cos^n(\theta) &= \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, e^{i(2p-n)\theta} \\
\sin^n(\theta) &= \frac{1}{(2i)^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, (-1)^{n-p}\, e^{i(2p-n)\theta}
\end{aligned}$$

Exercice 1 Montrer que:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \cos\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \sin\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

θ étant tel que $\sin\dfrac{\theta}{2} \neq 0$.

II.3 Racines n^{ieme} d'un complexe

Théorème II.2 Soit n un entier naturel ≥ 2, et soit $a \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble

$$\mathcal{R}_n(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = a\}$$

est de cardinal n, et pour $\theta \in \arg(a)$, on a

$$\mathcal{R}_n(a) = \left\{|a|^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, 0 \leq k \leq n-1\right\}$$

Théorème II.3 (et définition) Pour $n \geq 2$, $\mathcal{R}_n(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ est un sous groupe de $\mathbb{U}$,appelé goupe des racines n^{ieme} de l'unité, noté $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

II.4 Exponentiel Complexe

Définition 4 Pour tout $z = x + iy$, on pose $\exp(z) = e^x e^{iy}$ (ou e^z).

Théorème II.4 L'application exponentiel

$$\begin{aligned}
\varphi : (\mathbb{C}, +) &\longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times) \\
z &\longmapsto \exp(z)
\end{aligned}$$

est un morphisme surjectif de groupes, i.e:

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} : e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

dont le noyeau est: $2i\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$, i.e:

$$\exp(z) = 1 \Longleftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Remarque 6 Si $z = a + ib$ alors $|e^z| = e^a$ et $\arg(e^z) = b + 2k\pi$ et $(k \in \mathbb{Z})$.

Conséquence: L'équation $e^z = a$, $a \in \mathbb{C}^*$

Si $a = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, alors on a:

$$\begin{cases} e^z = a \\ z = x + iy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln|a| \\ y \in \arg(a) \end{cases}$$

III Nombres Complexes et Géométrie

III.1 Affixe d'un point

Le plan euclidien étant muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. L'application:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M(x,y) & \longmapsto & x + iy \end{array}$$

est bijective. Le complexe z est appelé l'affixe du point M, on écrit $M(z)$, z est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Remarque 7 Si $M(z)$ alors z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Propriétés

Soit A et M deux points d'affixe respectifs a et z.

- Le conjugué $\bar{z}$ est alors l'affixe du symétrique de $M(z)$ par rapport à la symétrie axiale par rapport a $(O, \vec{x})$.
- $|z| = OM$ et $\arg(z)$ est égal à la mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right)$.
- Si $A(a)$ alors $\overrightarrow{AM}$ est d'affixe $z - a$ et $|z - a| = AM$.
- Le cercle de centre $A(a)$ et de rayon r est l'ensemble $\{M(z) \mid |z - a| = r\}$.
- Le disque fermé de centre $A(a)$ et de rayon r est l'ensemble $\{M(z) \mid |z - a| \leq r\}$.

III.2 Quelques transformations affines

Définition 5 On appelle similitude directe (respectivement indirecte),toute application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az + b \text{ (resp } z \longmapsto a\bar{z} + b) \end{array}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

En particulier on a les applications suivantes sont des similitudes:

Symétrie axiale: $z \longmapsto \bar{z}$ d'axe $(O, \vec{x})$.

Translation: $z \longmapsto z + b$, de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $b \in \mathbb{C}$.

Homothétie: $z \longmapsto az + b$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$, son centre est le point d'affixe la solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az + b = z$ et de rapport a.

Définition 6 Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, a \neq 1$ une similitude directe. On appelle

- Centre de la similitude l'unique point invariant ω tq $\omega = a\omega + b$.
- Rapport de la similitude le réel $k = |a|$.
- Angle de la similitude l'angle $\arg(a)$.

Exercice 2 Examiner l'invariant de $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \longmapsto a\bar{z} + b$.

III.3 Droites et cerles

- Equation de droite: $\bar{u}z + u\bar{z} + w = 0$ avec $u \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{R}$.
- Equation de cercle: $z\bar{z} - \bar{u}z - u\bar{z} + \gamma = 0$ avec $|u|^2 - \gamma \geq 0$, $u \in \mathbb{C}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Propriétés

Soit $A\,(a)$ $B\,(b)$ $Z\,(z)$ trois points du plan alors on a:

1. $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = \dfrac{|z-a|}{|z-b|} = \dfrac{AZ}{BZ}$ est le rapport des longueurs des côtés du triangle issus de Z. En particulier, on a: $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = 1$ si et ssi AZB est isocèle en Z.
2. $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \widehat{BZA}$. En particulier:
   (a) Si $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ alors AZB est équilatéral.
   (b) Les points A, B et Z sont alignés si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$.
   (c) Les droites (AZ) et (BZ) sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soient $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ des points du plan. Montrer que $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{vmatrix} = 0.$$