

# Séries numériques

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

## Table des matières

<b>I Notion de séries</b>	<b>1</b>
I.1 Définitions – Exemples . . . . .	1
I.2 Série absolument convergente . . . . .	16
I.3 Séries alternées . . . . .	22
<b>II Séries à termes positifs</b>	<b>29</b>
II.1 Principes de comparaison . . . . .	30
II.2 Critères de convergence . . . . .	35
II.3 Sommatation des relations de comparaison . . .	41
<b>III Série entière</b>	<b>50</b>
III.1 Définitions – Exemples . . . . .	50

III.2 Rayon de convergence . . . . .	51
III.3 Exemple : la fonction exponentielle . . . . .	56

## I Notion de séries

### I.1 Définitions – Exemples

**Définition I.1** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes dans  $\mathbb{C}$  (ou dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ ). On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'appelle suite des sommes partielles de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On parle de série de terme général  $a_n$  lorsqu'on s'intéresse à la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On note cette série  $\sum a_n$ .

On dira que la série  $\sum a_n$  converge si la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. ①

Si non on dira que la série diverge.

En cas de convergence la limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est notée  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

et s'appelle la somme de la série  $\sum a_n$ , i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n$$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la somme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

s'appelle reste d'ordre  $n$ . Dans le cas de convergence  $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  ②

### Exemples

(1)  $\sum 1, \sum (-1)^n$  divergent :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty; \sum_{k=0}^n (-1)^k = 0 \text{ ou } 1.$$

(2)  $\sum \frac{1}{2^n}$  converge de somme 2 :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)}$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/2)^{n+1} = 0$ . ③

(3)  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$  converge et a pour somme 1 :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

(4)  $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$  diverge :

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(n+1) - \ln(n).$$

### Remarques

(1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$
④

(2) À une suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est associée la série  $\sum a_n$  définie par

$$a_0 = s_0 \text{ et } a_n = s_n - s_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

et la correspondance entre ensemble des suites et celui des séries est bijective et linéaire.

(3) Si deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)$  sont égales à partir d'un certain rang alors les séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont de même nature, mais pas de même somme en général.

**Théorème I.1** Si la série  $\sum a_n$  converge alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

**Preuve:** utiliser  $a_n = S_n - S_{n-1}$  ⑤

<p><b>Exemple I.1</b> Les séries <math>\sum \cos n</math>, <math>\sum \sin n</math>, <math>\sum e^{in}</math> ne sont pas convergentes, et en général :</p> <p><b>Proposition I.1</b> Soit <math>q \in \mathbb{C}</math>, la série <math>\sum q^n</math> converge si et seulement si <math> q  &lt; 1</math>.</p> <p><b>Preuve:</b> <math>\sum_{p=0}^n q^p = \frac{1-q^{p+1}}{1-q}</math>, donc la série <math>\sum q^n</math> converge si et seulement si la suite <math>(q^n)_n</math> converge, et donc si et seulement si <math> q  &lt; 1</math>. on note ici que si <math> q  \geq 1</math> alors <math>q^n \not\rightarrow 0</math></p> <p style="text-align: right;">⑥</p>	<p><b>Développements décimaux</b></p> <p><b>Théorème I.2</b> Pour tout réel <math>x &gt; 0</math>, il existe une suite unique <math>(a_n)_{n \geq 1} \in [0, 9]^{\mathbb{N}}</math> telle que pour tout <math>n \in \mathbb{N}^*</math> :</p> $\underbrace{\lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}}_{\text{Valeur approchée par défaut}} \leq x < \underbrace{\lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}}_{\text{Valeur approchée par excès}}$ <p>où <math>\lfloor x \rfloor</math> est la partie entière de <math>x</math>. En plus la série <math>\sum a_n 10^{-n}</math> est convergente et on a</p> $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ <p style="text-align: right;">⑦</p>
<p><b>Preuve:</b> La construction de la suite se fait par récurrence. Il suffit en effet de considérer l'encadrement</p> $E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1$ <p>donc</p> $\frac{E(10^n x)}{10^n} \leq x < \frac{E(10^n x)}{10^n} + \frac{1}{10^n},$ <p>il suffit ensuite d'écrire <math>E(10^n x)</math> sous la forme</p> $M \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_n,$ <p>son écriture en base 10. En plus l'encadrement</p> $\lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}$ <p style="text-align: right;">⑧</p>	<p>permet de voir que la suite <math>(s_n)</math> des sommes partielles vérifie</p> $x - \frac{1}{10^N} < s_n = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^N a_n 10^{-n} \leq x$ <p>pour tout <math>N \in \mathbb{N}^*</math>. Elle est donc convergente de limite <math>x</math></p> <p><b>Remarques</b></p> <p>(1) La suite <math>(a_n)_{n \geq 1}</math> ne peut pas être stationnaire égale à 9 à partir d'un certain rang. En effet, s'il existe <math>N</math> tel que <math>s_n = 9</math> pour tout <math>n &gt; N</math></p> <p style="text-align: right;">⑨</p>
<p>alors</p> $\begin{aligned} x &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = x \\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^N a_n 10^{-n} + \frac{9}{10^{N+1}} \frac{10}{9} \\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^N a_n 10^{-n} + \frac{1}{10^N} \end{aligned}$ <p>ce qui contredit la stricte inégalité dans le <b>Théorème I.2</b>.</p> <p>(2) Les nombres décimaux (de la forme <math>X \times 10^{-n}</math> avec <math>X \in \mathbb{Z}</math> et <math>n \in \mathbb{N}</math>) peuvent avoir un développement décimal</p> <p style="text-align: right;">⑩</p>	<p>de la forme</p> $xxx, a_1 \dots a_p 99999\dots$ <p>contenant que des 9 à partir d'un certain rang, il est dit <i>impropre</i>. Dans ce cas le développement décimal "propre" est l'écriture ordinaire</p> $xxx, a_1 \dots a_{p-1} (a_p + 1)$ <p>par exemple</p> $1, 123999999\dots = 1, 124$ <p style="text-align: right;">⑪</p>
<p><b>Sommation par paquets</b></p> <p><b>Théorème I.3</b> Soit <math>\sum a_n</math> une série convergente. Pour toute application <math>\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}</math> strictement croissante, si on pose</p> $b_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} b_k \text{ et } \forall n \geq 1 : b_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} b_k$ <p>alors la série <math>\sum b_n</math> est convergente de même somme que <math>\sum a_n</math>.</p> <p>La série <math>\sum b_n</math> est dite obtenue par <i>groupement de termes</i> à partir de <math>\sum a_n</math>. Et si <math>\sum a_n</math> est à termes positifs, la convergence d'une série <math>\sum b_n</math> obtenue par groupement de termes implique celle de <math>\sum a_n</math>.</p> <p style="text-align: right;">⑫</p>	<p><b>Preuve:</b> On a <math>\sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^{\varphi(n)} a_k</math> donc la suite des sommes partielles de <math>\sum b_n</math> est extraite de celle de <math>\sum a_n</math>.</p> <p><b>Exercice I.1</b> Montrer que si</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim a_n = 0</math> et</li> <li><math>\exists M \in \mathbb{N} \mid \forall n : \varphi(n+1) - \varphi(n) \leq M</math>,</li> </ul> <p>on a la réciproque : <math>\sum b_n</math> converge <math>\implies \sum a_n</math> converge.</p> <p><b>Critère de Cauchy</b></p> <p>Le critère de Cauchy pour une série <math>\sum a_n</math> s'exprime par :</p> $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq p :  x_p + x_{p+1} + \dots + x_q  \leq \varepsilon$ <p style="text-align: right;">⑬</p>

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N} : |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq \varepsilon$$

**Proposition I.2** Une série est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

**Exemple I.2** La série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge car ses sommes partielles vérifient

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}.$$

(14)

**Opérations sur les séries**

On munit l'ensemble des séries à termes dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) (ou bien à termes dans  $\mathbb{R}^d$ ) d'une structure de  $\mathbb{K}$ -ev, en posant pour toute série  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$  :

$$\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n) \text{ et } \alpha \sum a_n = \sum \alpha a_n$$

On a alors rapidement, grâce aux opérations sur les limites des suites

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ et } \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n$$

dans le cas de convergence des séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$ .

(15)

**Proposition I.3** L'ensemble des séries à termes dans  $\mathbb{K}$  (sous corps de  $\mathbb{C}$ ) est alors un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les opérations usuelles sur les suites dont l'ensemble des séries convergentes est un sous espace vectoriel. Et l'application

$$(a_n)_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

qui à une série convergente associe sa somme est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des séries convergentes.

**I.2 Série absolument convergente**

**Définition I.2** Une série  $\sum a_n$  à termes dans  $\mathbb{C}$  (ou dans  $\mathbb{R}^d$ ) est dite absolument convergente si  $\sum |a_n|$  (ou  $\sum \|a_n\|$ ) converge.

(16)

**Théorème I.4** Toute série  $\sum a_n$  à termes dans  $\mathbb{C}$  (ou dans  $\mathbb{R}^d$ ) absolument convergente est convergente, et on a l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_0^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_0^{+\infty} |a_n|.$$

**Preuve:** Soit  $\sum a_n$  une telle série alors  $\sum |a_n|$  vérifie le critère de Cauchy. Puisque pour tout  $p, q \in \mathbb{N}, q \geq p, |x_p + \dots + x_q| \leq |x_p| + \dots + |x_q|$ . Alors  $\sum a_n$  vérifie elle aussi le critère de Cauchy, donc converge

**Définition I.3** Une série numérique convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente.

(17)

**Remarque I.1** Si  $\sum a_n$  est semi-convergente, on ne peut pas calculer la somme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  dans le "désordre", on dit que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas sommable. Dans le cas où la série est absolument convergente, on peut sommer les  $a_n$  dans n'importe quel ordre et avoir la même somme, on dit alors que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable, et on pose  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

**Théorème I.5** Soit  $\sum x_n$  et  $\sum y_n$  deux séries absolument conver-

(18)

gentes, alors la série de terme général  $z_n$  défini par la relation

$$z_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} = \sum_{\substack{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2 \\ \text{tel que } k_1 + k_2 = n}} x_{k_1} y_{k_2}$$

(Produit de convolution ou de Cauchy)

est absolument convergente, avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} \right) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right)$$

**Preuve:** Posons  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y$ , alors pour tout

(19)

$N \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^n z_k - \sum_{k=0}^n x_k \sum_{k=0}^n y_k \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{(k_1, k_2) \in [0, n]^2 \\ \text{tel que } k_1 + k_2 \leq n}} x_{k_1} y_{k_2} - \sum_{(k_1, k_2) \in [0, n]^2} x_{k_1} y_{k_2} \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{(k_1, k_2) \in [0, n]^2 \\ \text{tel que } k_1 + k_2 > n}} x_{k_1} y_{k_2} \right| \\ &\leq \sum_{\substack{(k_1, k_2) \in [0, n]^2 \\ \text{tel que } k_1 + k_2 > n}} |x_{k_1}| |y_{k_2}| \end{aligned}$$

(20)

$$\leq \sum_{k_1=0}^n |x_{k_1}| \sum_{k_2=0}^n |y_{k_2}| - \sum_{\substack{(k_1, k_2) \in [0, n]^2 \\ \text{tel que } k_1 + k_2 \leq n}} |x_{k_1}| |y_{k_2}|$$

on peut donc se ramener au cas de séries à termes réels positifs. Et dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=0}^n z_n \leq \sum_{k=0}^n x_k \sum_{k=0}^n y_k \leq \sum_{k=0}^{2n} z_n$$

ce qui permet de montrer que la série  $\sum z_n$  est convergente et par passage aux limites, on a la relation sur les limites

(21)

**I.3 Séries alternées**

**Définition I.4** La série  $\sum a_n$  à termes réels ( $a_n \in \mathbb{R}$ ) est dite *alternée* si la suite  $((-1)^n a_n)$  garde un signe constant, c'est à dire qu'elle est de la forme

$$\sum (-1)^n b_n \text{ où } (b_n)_n \text{ est une suite réelle à signe constant.}$$

**Critère de Leibniz**

**Théorème I.6** Si une série alternée  $\sum a_n$  vérifie :  $(|a_n|)_n$  décroît et tend vers zéro, alors elle converge et on a la majoration du reste

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| \leq |a_n| \tag{22}$$

**Preuve:** On peut supposer  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n b_n$  avec  $(b_n)$  suite positive. Donc  $(|x_n|) = (b_n)$  décroît vers zéro. On note  $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$ . On a alors :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = y_{2n+2} - y_{2n+1} \leq 0$$

et

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -y_{2n+3} + y_{2n+2} \geq 0.$$

Donc la suite  $(S_{2n})$  est décroissante et  $(S_{2n+1})$  est croissante et on a en plus  $S_{2n+1} - S_{2n} = y_{2n+1}$  qui tend vers zéro. Donc les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes, elles convergent alors vers la même limite, ce qui entraîne la convergence de  $\sum a_n$ .  
 puisque  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes et convergent vers

(23)

la somme de  $\sum a_n$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$S_{2n+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} x_k \leq S_{2n}.$$

En retranchant  $S_{2n}$  on obtient

$$x_{2n+1} \leq \sum_{k=2n+1}^{\infty} x_k \leq 0$$

et donc  $\left| \sum_{k=2n+1}^{\infty} x_k \right| \leq |x_{2n+1}|$ .  
 De même pour  $\left| \sum_{k=2n}^{\infty} x_k \right| \leq |x_{2n}|$ .

(24)

**Exemple I.3** La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$  est semi-convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2.$$

En effet

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-x)^k dx \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx \end{aligned}$$

(25)

avec

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx \right| &\leq \int_0^1 \left| \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \right| dx \leq \int_0^1 |x^{n+1}| dx \\ &\leq \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

**Remarque I.2** La règle suivante est applicable dans le cas général (même complexe), et permet de ramener l'étude d'une série semi-convergente à celle d'une série absolument convergente.

(26)

**Proposition I.4** Soit  $(x_n), (y_n)$  deux suites complexes, alors :

$$\sum_{k=1}^n x_k (y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) y_k + x_n y_n - x_1 y_0$$

(Transformation d'Abel)

**Théorème I.7** Si  $(\varepsilon_n)$  est une suite réelle strictement décroissante tendant vers 0 et  $(z_n)$  une suite complexe, dont la suite des sommes partielles  $\left( S_n = \sum_{k=0}^n x_k \right)_n$  est bornée, alors la série  $\sum \varepsilon_n x_n$  est convergente.

**Preuve:** Par application de la transformation d'Abel avec

(27)

$(S_n)_n$  et  $(\varepsilon_n)_n$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k \varepsilon_k &= \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) \varepsilon_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) S_k + S_n \varepsilon_n - \varepsilon_1 S_0 \end{aligned}$$

la série  $\sum (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) S_k$  étant absolument convergente et  $\lim S_n \varepsilon_n = 0$  donc la série  $\sum x_k \varepsilon_k$  est convergente

(28)

**II Séries à termes positifs**

**Proposition II.1** Une série  $\sum a_n$  à termes réels positifs ( $a_n \in \mathbb{R}^+$ ) est convergente si et seulement si sa suite des sommes partielles est majorée, auquel cas on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \mid N \in \mathbb{N} \right\}$$

**Remarque II.1** Il est pratique de noter

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$$

(29)

dans le cas où la série  $\sum a_n$  à termes réels positifs ( $a_n \in \mathbb{R}^+$ ) est divergente.

## II.1 Principes de comparaison

### Comparaison de base

**Théorème II.1** Si  $0 \leq u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.

Et donc si  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge.

En général si pour tout  $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq v_n$  alors  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$  l'inégalité étant dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Preuve:** la faire en exercice

(30)

### Comparaison asymptotique

**Théorème II.2** Soient  $\sum x_n$  et  $\sum y_n$  deux séries à termes positifs.

- Si  $x_n = O(y_n)$  (ou bien  $x_n = o(y_n)$ ) et  $\sum y_n$  converge alors  $\sum x_n$  converge. Et si  $x_n = O(y_n)$  (ou bien  $x_n = o(y_n)$ ) et  $\sum x_n$  diverge alors  $\sum y_n$  diverge.
- Si  $x_n \sim y_n$  et  $\sum y_n$  converge alors  $\sum x_n$  converge.

**Preuve:** Utiliser les définitions des relations de comparaison pour déduire des majorations à partir d'un certain rang

(31)

### Exemples

(1) la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  diverge donc pour tout  $\alpha < 1$ ,  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  diverge.

(2) la série  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$  converge donc  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge et pour tout  $\alpha \geq 2$ ,  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge.

### Comparaison logarithmique

**Théorème II.3** Soient  $\sum x_n$  et  $\sum y_n$  deux séries à termes positifs. On suppose qu'à partir d'un certain rang  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq$

(32)

$\frac{y_{n+1}}{y_n}$ . Alors  $x_n = O(y_n)$  et donc la convergence de la série  $\sum y_n$  implique celle de  $\sum x_n$ .

**Preuve:** On peut supposer  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ,

$$\frac{x_1}{x_0} \times \frac{x_2}{x_1} \times \dots \times \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq \frac{y_1}{y_0} \times \frac{y_2}{y_1} \times \dots \times \frac{y_n}{y_{n-1}}$$

Après simplification on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}, \frac{x_n}{x_0} \leq \frac{y_n}{y_0}$

(33)

**Exemple II.1** La suite  $(x_n)$  est définie par

$$\begin{cases} x_0 > 0, \text{ et pour } n \geq 0, \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan(x_n) \end{cases}$$

**Réponse:** On sait que pour  $x \geq 0$   $\arctan(x) \leq x$ , donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Par conséquent  $x_n = O\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$  et  $\sum x_n$  converge.

(34)

## II.2 Critères de convergence

### Critère de Cauchy

**Proposition II.2** Soit  $\sum x_n$  une série à termes positifs, on suppose que  $\sqrt[n]{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \in \mathbb{R}$ .

- Si  $\lambda < 1$  alors  $\sum x_n$  converge.
- Si  $\lambda > 1$  alors  $\sum x_n$  diverge.

**Remarque II.2** Si  $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$ , on ne peut rien dire.

(35)

### Critère de d'Alembert

**Proposition II.3** Soit  $\sum x_n$  une série à termes positifs. On suppose  $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \in \mathbb{R}$  (bien sûr  $(x_n)$  ne doit pas s'annuler à partir d'un certain rang).

- Si  $\lambda < 1$  alors  $\sum x_n$  converge.
- Si  $\lambda > 1$  alors  $\sum x_n$  diverge.

**Preuve:** Si  $\lambda > 1$  alors  $(x_n)$  est croissante à partir d'un certain rang donc ne peut tendre vers zéro. Si  $\lambda < 1$  soit alors  $k$  tel que  $\lambda < k < 1$ . à partir d'un certain rang on a :  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq$

$$k = \frac{k^{n+1}}{k^n}. \text{ Donc}$$

(36)

$x_n = O(k^n)$ . La série  $\sum k^n$  étant convergente il en est de même de  $\sum x_n$

**Remarque II.3** Si  $\lambda = 1$  dis cas douteux de D'Alembert.

- $\sum 1$  diverge et  $\frac{1}{1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .
- $\sum \frac{1}{n^2}$  converge et  $\frac{1}{\frac{(n+1)^2}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .
- **La réciproque de d'Alembert est fautive :** Une série qui converge ses termes peuvent toujours s'annuler. On peut trouver une série convergente  $\sum x_n$  pour laquelle  $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n$

(37)

converge pas (chercher en une ).

**Remarque II.4 Cas d'une série quelconque.**

supposons  $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \in \mathbb{R}$  alors :

- Si  $\lambda < 1$  alors  $\sum x_n$  converge absolument.
- Si  $\lambda > 1$  alors  $\sum x_n$  diverge.

**Critère de condensation de Cauchy**

**Théorème II.4** Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de réels positifs, la série  $\sum a_n$  est convergente si et seulement si la série  $\sum 2^n a_{2^n}$  l'est.

(38)

**Preuve:** On pose  $b_n = 2^n a_{2^n}$ , on a

$$\frac{b_n}{2} = 2^{n-1} a_{2^{n-1}} \leq \sum_{k=n} a_k = c_n \leq 2^{n-1} a_{2^{n-1}} = b_{n-1}$$

la série  $\sum c_n$  n'est autre que la série  $\sum a_n$  par blocs et les deux inégalités montre que les deux séries  $\sum b_n$  et  $\sum c_n$  sont de même nature

**Séries de Riemann**

**Théorème II.5** La série  $\sum \frac{1}{n^s}$ , pour  $s \in \mathbb{R}$ , converge si et seulement si  $s > 1$ .

(39)

**Preuve:** La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^s}$  est convergente si et seulement si la série géométrique  $\sum 2^{(1-s)n}$  l'est ce qui équivaut à la condition  $2^{(1-s)} < 1$  ou bien  $(1-s) < 0$

**Exercice II.1** Pour  $\beta \in \mathbb{R}$  étudier la nature de la série  $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$  converge.  $\sum 2^n \frac{1}{2^n (\ln(2^n))^\beta} = \sum \frac{1}{(n \ln(2))^\beta}$ ,  $\beta > 1$ .

**Remarque II.5** Si la série  $\sum a_n$  est à termes positif telle que  $(n^\alpha a_n)_n$  converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  alors

- Si  $\alpha > 1$  la série  $\sum a_n$  converge.
- Si  $\ell \neq 0$  et  $\alpha < 1$  alors  $\sum a_n$  diverge.

(40)

**II.3 Sommation des relations de comparaison**

**Théorème II.6** Soient  $\sum x_n$  et  $\sum y_n$  deux séries à termes positifs.

- Si  $\sum y_n$  converge alors :
  - ▷  $x_n = O(y_n) \implies \sum_{k=n} x_k = O\left(\sum_{k=n} y_k\right)$ .
  - ▷  $x_n = o(y_n) \implies \sum_{k=n} x_k = o\left(\sum_{k=n} y_k\right)$ .
  - ▷  $x_n \sim y_n \implies \sum_{k=n} x_k \sim \sum_{k=n} y_k$ .
- Si  $\sum y_n$  diverge alors :
  - ▷  $x_n = O(y_n) \implies \sum_{k=0}^n x_k = O\left(\sum_{k=0}^n y_k\right)$ .

(41)

$$\begin{aligned} \triangleright x_n = o(y_n) &\implies \sum_{k=0}^n x_k = o\left(\sum_{k=0}^n y_k\right). \\ \triangleright x_n \sim y_n &\implies \sum_{k=0}^n x_k \sim \sum_{k=0}^n y_k. \end{aligned}$$

**Preuve:** Raisonnement du type Cesaro

**Remarque II.6** Si  $x_{n+1} - x_n \rightarrow \ell \neq 0$ , alors  $x_n \sim n\ell$ . On retrouve ainsi le résultat dû à Cesaro.

**Méthode d'éclatement**

On utilise souvent des développements limités pour préciser le comportement du terme général d'une série, quand les théorèmes de comparaison de base ne s'appliquent pas.

(42)

**Exemple II.2**  $a_n = (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ , on a bien  $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$  qui est le terme général d'une série convergente, mais cela ne suffit pas car  $a_n$  ne garde pas un signe constant. On utilise alors le développement asymptotique :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc  $a_n$  est la somme de termes généraux de séries convergentes, et par conséquent  $\sum a_n$  est convergente.

(43)

**Constante d'Euler**

On sait que

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

les deux séries correspondants divergent (une suffit) donc

$$\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

De là on retrouve :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n).$$

(44)

Étudions  $s_n = H_n - \ln(n)$ , un procédé fréquent consiste à considérer  $s_n$  comme la somme partielle d'une série  $u_n$ , où

$$u_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln(n) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$$

Par le théorème sur les séries à termes positifs équivalents,  $\sum u_n$  converge. On en déduit un premier résultat : Il existe un réel  $\gamma$  (constante d'EULER) telque

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Numériquement,  $\gamma \approx 0,57721566490153286061\dots$

De plus, puisque

$$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(45)

<p>et la série <math>\sum \frac{1}{n(n+1)}</math> est convergente alors</p> $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ <p>ce qui permet d'avoir</p> $\sum_{n>N} -u_n = \sum_{n>N} (s_{n-1} - s_n) = s_N - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ $= H_N - \ln(N) - \gamma \sim \frac{1}{2N}$ <p>ce qui prouve que</p> $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ <p style="text-align: right;">(46)</p>	<p>On peut itérer le procédé, en développant <math>u_n + \frac{1}{2n^2} \dots</math></p> <p><b>Formule de Stirling</b></p> <p>Pour tout <math>n \in \mathbb{N}^*</math>, on considère l'intégrale :</p> $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$ <p>Déterminer une relation de récurrence entre <math>I_{n+2}</math> et <math>I_n</math>. On en déduit l'expression</p> $I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ <p style="text-align: right;">(47)</p>
<p>Montrer l'équivalence : <math>I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_{n+1}</math>.</p> <p>Montrer que la suite <math>(J_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> avec <math>J_n = (n+1)I_n I_{n+1}</math> est constante et en déduire l'équivalence :</p> $I_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$ <p>Pour <math>n \in \mathbb{N}^*</math>, on pose</p> $s_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n \text{ et } u_n = s_n - s_{n-1}.$ <p>On a l'équivalence :</p> $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$ <p style="text-align: right;">(48)</p>	<p>On en déduit que la suite <math>(s_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> est convergente, donc avec <math>C = \lim_n e^{s_n} &gt; 0</math>, on a :</p> $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$ <p>En utilisant la question, en déduire que :</p> $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}. \quad (\text{Formule de Stirling})$ <p style="text-align: right;">(49)</p>
<p><b>III Série entière</b></p> <p><b>III.1 Définitions – Exemples</b></p> <p><b>Définition III.1</b> On appelle série entière d'une variable complexe <math>z</math> toute série dont le terme général de la forme <math>a_n z^n</math>. On appelle domaine de convergence <math>D</math> de la série entière l'ensemble des <math>z</math> tels que la série converge.</p> <p><b>Exemples</b></p> <p>(1) Les polynômes</p> <p>(2) <math>\sum \frac{z^n}{n!}, \sum \frac{z^n}{n}, \sum z^n \dots</math></p> <p style="text-align: right;">(50)</p>	<p><b>III.2 Rayon de convergence</b></p> <p><b>Théorème III.1 (Théorème d'Abel)</b> Soit <math>\sum a_n z^n</math> une série entière. il existe un unique élément <math>R \in [0, +\infty]</math> tel que la série <math>\sum a_n z^n</math> soit convergente si <math> z  &lt; R</math> et que la suite <math>(a_n z^n)_n</math> ne soit pas bornée si <math> z  &gt; R</math>.</p> <p><b>Définition III.2</b> <math>R</math> est alors appelé le rayon de convergence de la série entière <math>\sum a_n z^n</math>, qu'on notera <math>RC(\sum a_n z^n)</math>.</p> <p><b>Preuve:</b> On pose <math>R = \sup \{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée}\}</math>. D'abord par définition de <math>R</math> la suite <math>( a_n z^n )</math> n'est pas bornée pour tout <math>z</math> tel que <math> z  &gt; R</math>. Soit maintenant <math>z \in \mathbb{C}</math> tel que <math> z  &lt; R</math> et <math>r \geq 0</math> tel que <math> z  &lt; r &lt; R</math>, <math>(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}</math> est alors bornée par une constante <math>M</math></p> <p style="text-align: right;">(51)</p>
<p>et pour tout <math>n \in \mathbb{N}</math> :</p> $ a_n z^n  =  a_n r^n  \left \frac{z}{r}\right ^n \leq M \left \frac{z}{r}\right ^n$ <p>la série géométrique <math>\sum \left \frac{z}{r}\right ^n</math> étant convergente donc il en est de même pour <math>\sum  a_n z^n </math></p> <p><b>Remarque III.1</b> On ne peut rien dire si <math> z  = R</math>.</p> <p><b>Exemples</b></p> <p>(1) <math>RC(\sum z^n) = 1</math>, et si <math> z  = 1</math> la série diverge.</p> <p style="text-align: right;">(52)</p>	<p>(2) <math>RC(\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^n) = 1</math> et la série converge pour <math>z = 1</math>, voir d'autre point ...</p> <p>(3) <math>RC(\sum \frac{1}{n!} z^n) = +\infty</math> et <math>RC(\sum n! z^n) = 0</math>.</p> <p><b>Remarque III.2</b> Dans la pratique pour calculer <math>RC(\sum a_n z^n)</math> on utilise les règles de D'Alembert. et de Cauchy.</p> <p><b>Théorème III.2</b> Si <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n}\right  = L</math> ou <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = L</math>, avec <math>L \in [0, +\infty]</math>, alors <math>RC(\sum a_n z^n) = \frac{1}{L}</math>. Avec <math>\frac{1}{0} = +\infty</math> et <math>\frac{1}{+\infty} = 0</math>.</p> <p style="text-align: right;">(53)</p>

**En effet:** Par application du critère de D'Alembert (ou de Cauchy) à la série  $\sum a_n z^n$ , on a  $\left| \frac{a_{n+1} r^{n+1}}{a_n r^n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} r$ . Donc si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ , alors la série  $\sum a_n r^n$  est convergente pour tout  $r$  tel que  $rL < 1$  c'est à dire  $r < \frac{1}{L}$  et divergente pour  $r > \frac{1}{L}$ . Pour la règle de Cauchy, on a  $\sqrt[n]{|a_n r^n|} = r \sqrt[n]{|a_n|}$

**Théorème III.3** Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières, de rayon de convergence respectifs  $R_1$  et  $R_2$ , alors leurs séries somme et produit de termes général  $a_n + b_n$  et  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

(54)

ont pour rayon de convergence

$$\begin{aligned} R &= \min(R_1, R_2) & \text{si } R_1 \neq R_2 \\ R &\geq \min(R_1, R_2) & \text{si } R_1 = R_2 \end{aligned}$$

Dans ce cas pour tout  $|z| < R$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n &= \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_n z^n \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n \right) \times \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_n z^n \right) \end{aligned}$$

**Preuve:** Facile, la faire en exercice

(55)

### III.3 Exemple : la fonction exponentielle

**Proposition III.1** Le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{1}{n!} z^n$  est infini, et pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

**Preuve:** Avec  $a_n = \frac{1}{n!}$ , on a  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = n+1$ , donc  $R = +\infty$ . D'abord pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists c_n(x) \in ]-|x|, |x| : e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \frac{1}{(n+1)!} e^{c_n(x)}$$

(56)

donc

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right| = \frac{1}{(n+1)!} e^{c_n(x)} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

on conclut donc que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

De la même façon et à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée aux fonctions circulaires, on montre que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(57)

On déduit donc que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(ix) = \cos x + i \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \exp(x + iy) &= \exp(x) \exp(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{(iy)^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} x^k (iy)^{n-k} \right) \end{aligned}$$

(58)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x + iy)^n$$

donc pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

**Remarque III.3** On définit aussi les fonctions circulaire pour la variable complexe, par

$$\forall z \in \mathbb{C} : \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(59)