Notions Mathématiques de base

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

I Ensembles

I.1 Vocabulaire et notations

- L'ensemble vide est noté $\varnothing$.
- Si E et F sont deux ensembles alors:

$$E = F \text{ si et seulement si } E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

- Si E est un ensemble non vide, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
- A et B étant des parties d'un ensemble E, on note :
  - $A \cup B := \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}$: réunion de A et B.
  - $A \cap B := \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$: intersection de A et B.
  - $\complement_E A := \{x \in E : x \notin A\}$: le complémentaire de A dans E, noté aussi A^c.
  - $A \setminus B := \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}$: différence de A et B.
  - $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$: différence symétrique de A et B.

I.2 Règles de calcul dans $\mathcal{P}(E)$

A, B et C étant des parties d'un ensemble E, on montre les règles usuelles suivantes:

- Intersection:
  - $A \cap B = B \cap A$: Commutativité.
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$: Associativité.
  - $A \cap E = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.
- Réunion:
  - $A \cup B = B \cup A$: Commutativité.
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$: Associativité.
  - $A \cup E = E$; $A \cup \varnothing = A$.
- Entre réunion et intersection on a les règles suivantes:

  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Complémentaire:
  - $(A^c)^c = A$.
  - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$; $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
  - $A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c$.
- Ces règles s'appliquent aussi à une réunion ou intersection quelconque. Si I est un ensemble non vide quelconque et A_i une partie de E pour tout i dans I, on pose:
  - $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i$.
  - $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I : x \in A_i$.

Exemple 1 $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{i}, 1\right] =]0, 1]$; $\displaystyle\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \left[1 - \frac{1}{i}, 1\right] = \{1\}$, alors que $\displaystyle\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \left[1 - \frac{1}{i}, 1\right[= \varnothing$.

I.3 Produit d'ensembles

Définition 1 Etant donné deux ensembles E et F, on note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y), où x est élément de E et y élément de F. Si $E = F$ on note E^2 ou $E \times E$.
Plus généralement on définit le produit de n ensembles $E_1, E_2, ..., E_n$, comme étant l'ensemble des $n - uplets$ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ où pour tout i, $x_i \in E_i$.

Remarque 1 Par définition l'ensemble $E \times F$ est différent de E et de F sauf dans le cas où l'un des deux ensembles est vide. Dans ce cas $E \times F$ est l'ensemble vide.

- L'égalité entre couple se traduit par:

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}.$$

II Un peu de logique mathématique

Une proposition mathématique P est une phrase pouvant prendre les valeurs vrai ou faux.
Par exemple, dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers :

P: $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$: $m^2 = n$ est vrai.

Q: $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$: $m = n^2$ est faux

II.1 Connecteurs logiques

Etant donné une proposition, le travail du mathématicien consiste à déterminer si elle est vraie ou fausse. On est amené à regrouper diverses propositions de la façon suivante :

- **La négation:** La négation d'une proposition P est notée "$nonP$" ou "$\neg P$". La négation d'une proposition P vraie sera fausse et la négation d'une proposition P fausse sera vraie.

P	Vrai	Faux
$nonP$	Faux	Vrai

  - La négation de "$\forall x \in E : P(x)$" est "$\exists x \in E : nonP(x)$"
  - La négation de "$\exists x \in E : P(x)$" est "$\forall x \in E : nonP(x)$"

- **La conjonction:** "P *et* Q" est une proposition qui sera vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies.

P	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Q	Vrai	Faux	Vrai	Faux
P *et* Q	Vrai	Faux	Faux	Faux

- **La disjonction:** "P *ou* Q" est une proposition qui est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions P ou Q est vraie. Les deux peuvent être vraies. le "*ou*" a un sens inclusif. (Il existe un "*ou*" exclusif, mais qui n'est pas utilisé de façon usuelle).

P	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Q	Vrai	Faux	Vrai	Faux
P *ou* Q	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

  - La négation de $(P \text{ ou } Q)$ est $(\neg P \text{ et } \neg Q)$.
  - La négation de $(P \text{ et } Q)$ est $(\neg P \text{ ou } \neg Q)$

- **L'équivalence:** "$P \iff Q$" est vraie si et seulement si P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses, autrement dit, si P et Q ont même valeurs de vérité.

P	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Q	Vrai	Faux	Vrai	Faux
$P \iff Q$	Vrai	Faux	Faux	Vrai

Remarque 2 L'équivalence peut s'appliquer à des propositions fausses. Par exemple, si on veut montrer qu'une proposition P est fausse, on peut chercher une proposition Q équivalente à P et montrer que Q est fausse.

- **L'implication logique:** "$P \Longrightarrow Q$" est vraie si et seulement si P est fausse ou Q est vraie. En particulier on a l'équivalence: $(P \Longrightarrow Q) \iff (nonP \text{ ou } Q)$.

P	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Q	Vrai	Faux	Vrai	Faux
$P \Longrightarrow Q$	Vrai	Faux	Vrai	Vrai

  - La négation de $(P \Longrightarrow Q)$ est $(P \text{ et } \neg Q)$ qui est vraie dans le seul cas où P vraie et Q fausse. C'est le principe du *raisonnement par l'absurde*: pour montrer $(P \Longrightarrow Q)$, on suppose qu'on a $(P \text{ et } \neg Q)$ et on aboutit à une *contradiction*.
  - *La contraposée* de $(P \Longrightarrow Q)$ est l'implication $(\neg Q \Longrightarrow \neg P)$ qui lui est équivalente.
  - L'implication logique est *transitive* dans le sens suivant:

$$((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R).$$

II.2 Introduction à la démonstration

En mathématique, en plus des questions du type *calculer, déterminer, résoudre...* la plupart des questions se présentent sous la forme *montrer, démontrer, justifier, prouver, déduire.* Bien entendu il y'a une grande différence entre les deux types de questions.

La démarche démonstrative repose sur une liste de connaissances appelée à évoluer. Cette liste comprend tous les axiomes et théorèmes connus du démonstrateur, mais peut également évoluer par ajout de propriétés au cours de la démonstration.

Il convient d'abord de clairement séparer ce qu'on sait vrai (liste des connaissances, hypothèses diverses) de la conclusion à laquelle on veut arriver. Par ailleurs, il convient de savoir qu'une démonstration ne consiste pas forcément à partir de l'hypothèse, puis par une suite de déductions logiques, à arriver à la conclusion. On peut bien sûr partir de l'hypothèse pour en déduire diverses propriétés en espérant que l'une d'elles finira par être la conclusion cherchée, mais on peut aussi partir de la conclusion pour trouver des propriétés à partir desquelles la conclusion se déduit, en espérant ainsi remonter jusqu'aux hypothèses. On peut également opérer simultanément les deux démarches jusqu'à tomber sur une propriété faisant le lien entre les deux.

Ci-dessous, R est une propriété pouvant servir de jonction entre une progression venant de l'hypothèse et une progression venant de la conclusion :

$$\boxed{\text{Hypothèse } P} \Longrightarrow P_1 \Longrightarrow P_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \boxed{R} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow Q_2 \Longrightarrow Q_1 \Longrightarrow \boxed{\text{Conclusion } Q}$$

Sens dans lequel s'opère la recherche de nouvelles propriétés qui se déduisent de l'hypothèse. $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ Sens dans lequel s'opère la recherche de nouvelles propriétés d'où découle la conclusion.

Il convient également de distinguer ce qu'il faut faire pour **montrer** une conjecture, de ce qu'il faut faire pour **utiliser** une propriété déjà prouvée et faisant donc partie de la liste des connaissances. On donne ci-dessous certaines indications qui peuvent paraître triviales. Par ailleurs, les approches proposées ne sont pas uniques et d'autres peuvent être envisagées.

II.2.1 Pour montrer...

- ... une conjonction A **et** B, on montre A et on montre B.
- ... une disjonction A **ou** B, montrer A ou montrer B.
- ...une implication $A \Longrightarrow B$, ajouter A à sa liste de connaissances et montrer B.
- ...une négation $\neg A$, ajouter A à sa liste de connaissance et montrer qu'on a alors une contradiction (principe du **raisonnement par l'absurde**).

- ... $(\exists x \in E)A(x)$, exhiber un élément $t \in E$ bien choisi et montrer $A(t)$ oubien justifier l'existence à travers un résultat théorique général.
- ... $(\forall x \in E)A(x)$, montrer $A(x)$, $x \in E$ étant fixé mais arbitraire. Dans ce cas la démonstration commence par ‹‹soit $x \in E$ ...››. Dans le cas où E est l'ensemble $\mathbb{N}$ un **raisonnement par récurrence** peut être fait.

Remarque Pour montrer une implication $A \Longrightarrow B$ on peut aussi procéder par **contraposée** et montrer l'implication $\neg B \Longrightarrow \neg A$.

II.2.2 Pour utiliser...

- ...une conjonction P **et** Q, ajouter P à la liste des connaissances et ajouter Q.
- ...une disjonction P **ou** Q, utiliser P ou Q pour montrer R en montrant $P \Longrightarrow R$ **et** $Q \Longrightarrow R$ (**raisonnement par disjonction des cas**).
- ...une implication $P \Longrightarrow Q$, ajouter Q à la liste des connaissances à condition que P y soit déjà.
- ...une négation $\neg P$, conclure à une absurdité si P fait déjà partie de la liste des connaissances.
- ... $(\exists x \in E)P(x)$, ajouter $P(u)$ à la liste des connaissances, $u \in E$ sur lequel nous n'avons aucune possibilité de choix.
- ... $(\forall x \in E)P(x)$, ajouter $P(t)$ à la liste des connaissances, $t \in E$ étant un élément de notre choix.

Exemple 2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \left(n^2 \textit{ impair} \Longrightarrow n \textit{ impair}\right)$.

Il faut montrer l'implication pour tout entier naturel n. Pour cela on considère n quelconque dans $\mathbb{N}$ et on montre l'implication

$$\left(n^2 \text{ impair} \Longrightarrow n \text{ impair}\right) \qquad (P(n))$$

ou sa contraposée

$$\left(n \text{ pair} \Longrightarrow n^2 \text{ pair}\right) \qquad (Q(n))$$

qui est facile à expliciter du fait que tout entier est soit pair soit impair. Et plus facile à démontrer.

En effet si n pair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$, donc $n^2 = 4p^2 = 2.2p^2$ qui est aussi pair. $Q(n)$ est alors prouvée et par suite $P(n)$, CQFD.

III Applications, lois de composition

III.1 Définitions, exemples

Définition 2 E et F étant deux ensembles non vides, en associant à chaque élément x de E un et un seul élément y de F, on définit une **application** de E dans F.
Si on note cette application f, l'élément y associé à x est noté **f(x)** et est appelé **image** de x par f. y est alors appelé **antécédent** de x par f.

Pour représenter l'application f de E dans F schématiquement on écrit:

$$f : E \longrightarrow F, x \longrightarrow f(x) \text{ ou } E \xrightarrow{f} F$$

Donc une application est détérminée par:

- Son *ensemble de départ* E.
- Son *ensemble d'arrivée* F.
- Son *graphe* $G = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times F$.

Exemple 3 Si $E \subset F$, l'application $i : E \longrightarrow F, x \longrightarrow x$ est appelée l'injection canonique de E dans F.

Exemple 4 Si $E = F$, l'application $Id_E : E \longrightarrow E, x \longrightarrow x$ est appelée l'identité de E.

Notations

On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E, l'ensemble des applications de E dans F. L'ensemble des suites numériques est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 3 (restriction, prolongement) Si f est une application de E dans F et A une partie de E, l'application

$$g : A \longrightarrow F, x \longmapsto f(x)$$

est appelée restriction de f à A. On la note $f_{|_E}$. f est alors appelée prolongement de g à E.

Exemple 5 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|$; les restrictions de f à $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, respectivement sont: $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto -x$.

III.2 Composition des applications

Définition 4 Soient $E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$ deux applications. On définit une application de E dans G, notée $g \circ f$, par:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}, x \longmapsto g(f(x))$$

Exemple 6 Si $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$, alors $g \circ f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x^2} = |x| \end{array}$.

P III.1 Soient $E \xrightarrow{f} F$, $F \xrightarrow{g} G$ et $G \xrightarrow{h} H$ des applications, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Par contre la composition n'est pas commutative, c'es à dire que généralement

$$f \circ g \neq g \circ f$$

même si $E = F = G$...

III.3 Image et image réciproque d'une partie

Définition 5 Soient $E \xrightarrow{f} F$, A une partie de E et B une partie de F. On définit:

- $f(A) = \{f(x)|x \in A\} = \{y \in F|\exists x \in A : y = f(x)\} \subset F$: L'image de A par f .
- $f^{-1}(B) = \{x \in E|f(x) \in B\} \subset E$: L'image réciproque de B par f .

$f(E)$ et par fois noté $\mathrm{Im}(f)$.

Propriétés: Soient $E \xrightarrow{f} F$, A, B des parties de E, X et Y des parties de F; on a:

P III.2 $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$.

P III.3 $X \subset Y \Longrightarrow f^{-1}(X) \subset f(^{-1}Y)$.

P III.4 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

P III.5 $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ par contre, on a seulement: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Exemple 7 Un exemple graphique (f non injective) où l'inclusion ci-dessus est stricte...

III.4 Application injective, surjective, bijective

Définition 6 (Equation) Soients $E \xrightarrow{f} F$ et $b \in F$; le problème

$$\begin{cases} \text{trouver } x \in E \text{ tel que} \\ f(x) = b. \end{cases} \tag{III.1}$$

est appelé équation à inconnue x dans E.

Exemple 8 Dans $\mathbb{R}$ les équations polynômiales. Dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes linéaires.

- On dit que f est **bijective** si pour tout $b \in F$, l'équation (III.1) admet une solution et une seule. ie:
$$\forall b \in F, \exists! a \in F : b = f(a).$$
- On dit que f est **surjective** si pour tout $b \in F$, l'équation (III.1) admet une solution aumoins. ie:
$$\forall b \in F, \exists a \in F : b = f(a).$$
Ce qui équivaut à dire que $f(E) = F$.
- On dit que f est **injective** si pour tout $b \in F$, l'équation (III.1) admet au plus une solution. ie:
$$\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$
Où de manière équivalente
$$\forall x, x' \in E : x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x').$$

Exemple 9 exemples graphiques...

Propriétés:

P III.6 la composée d'applications injectives (resp surjectives, bijectives) est injectives (resp surjectives, bijectives). Et réciproquement:

- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Preuve: En exercice.. ∎

Exemple 10 $f : \begin{array}{c} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{c} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \begin{cases} n-1 \text{ si } n > 0 \\ 0 \text{ si } n = 0. \end{cases} \end{array}$. On a $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ bijective alors que f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Exercice 1 Soit $E \xrightarrow{f} F$ et A une partie de E.

1. Montrer que $f^{-1}(f(A)) \supset A$.
2. Montrer que si f est injective on a égalité: $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 2 Soit $E \xrightarrow{f} F$ et B une partie de F.

1. Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap f(E)$.
2. Montrer que si f est surjective, $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

Définition 7 (Réciproque) Si $E \xrightarrow{f} F$ est bijective, on appelle application réciproque de f, l'application notée f^{-1} définie de F dans E par

$$\forall (x, y) \in E \times F : f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Dans ce cas on a: $\boxed{f \circ f^{-1} = Id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = Id_E}$.

Exemple 11 Id_E est bijective, et on a $(Id_E)^{-1} = Id_E$.

Remarque 3 Si $E \xrightarrow{f} F$ est bijective alors pour toute partie Y de F, $f^{-1}(Y)$ se confond avec l'image (directe) de Y par f^{-1}.

Théorème III.1 Soit $E \xrightarrow{f} F$.
f est bijective si et seulement si il existe $F \xrightarrow{g} E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$. Dans ce cas $g = f^{-1}$.

Preuve: $\Rightarrow$) Par définition de f^{-1}.
$\Leftarrow$) On montre que f est injective et surjective. ∎

Exemple 12 Avec $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f \neq Id_E$.

Proposition 1 Si $E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$ sont bijectives alors

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

III.5 Lois de composition interne

Définition 8 Une l.c.i ou opération sur un ensemble non vide E est une application de $E \times E$ dans E.

Notations

Usuellement les l.c.i sont notées à l'aide des opérateurs $+, -, *, ., \times, \circ$... et l'image du couple (x, y) est noté:

$$x + y, x - y, x.y, x * y \text{ ou simplement } xy \text{ pour une lois sans symbole.}$$

On écrit $(E, +)$ pour dire que E est muni de la l.c.i $" + "$, ou encore $(E, +, .)$ pour dire que E est muni des deux l.c.i $" + "$ et $"."$.

Définition 9 (commutativité, associativité, neutre) Une l.c.i $*$ sur E est dite commutative si

$$\forall (x, y) \in E^2 : x * y = y * x$$

Elle est dite associative si

$$\forall (x, y, z) \in E^3 : x * (y * z) = (x * y) * z$$

Un élément e de E est appelé élément neutre de $*$ si

$$\forall x \in E : x * e = e * x = x$$

Remarque 4 Si une l.c.i admet un élément neutre, il est est unique.

En effet, supposons par absurde que e et e' sont deux éléments neutres de $(E, *)$.
Donc $e' = e * e'$ car e est neutre, de même e' étant neutre donc $e = e * e'$.
C'est à dire $e' = e$.

Définition 10 (monoïde) On dit que E muni de lois $*$ est un monoïde si elle est associative et admet un élément neutre.
Si en plus la lois est commutative le monoïde $(E, *)$ est dit commutatif.

Définition 11 (symétrique) Dans un monoïde $(E, *)$ d'élément neutre e, un élément x est dit symétrisable s'il existe x' dans E tel que $x * x' = x' * x = e$.
x' est alors appelé le symétrique de x. En notation multiplicative il est noté $"x^{-1}"$ et est appelé inverse. En notation additive il est appelé opposé et est noté $" - x"$.

Définition 12 (partie stable) Une partie A de E est dite stable par la lois $*$, si

$$\forall x, y \in A : x * y \in A$$

Dans ce cas, $*$ définit sur A une l.c.i, appelée lois induite par celle de E.

IV Relation d'équivalence et d'ordre

IV.1 Partition d'un ensemble

Définition 13 Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{S}$ est une partition de E si

$$(i)\ \forall X \in \mathcal{S} : X \neq \varnothing.$$
$$(ii)\ \forall X, Y \in \mathcal{S} : X \neq Y \Longrightarrow X \cap Y = \varnothing.$$
$$(iii)\ \bigcup_{X \in \mathcal{S}} X = E.$$

Exemple 13 Un exemple où E est fini.

Proposition 2 Soit $f : E \longrightarrow F$ surjective. $\mathcal{S} = \left\{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in F\right\}$ est une partition de E.

Preuve: (i) car f est surjective.
(ii) Posons $X = f^{-1}(\{x\})$ et $Y = f^{-1}(\{y\})$ tels que $x \neq y$.
Si par absurde on suppose que $X \cap Y \neq \varnothing$ et $z \in X \cap Y$, alors $f(z) = x$ et $f(z) = y$, ce qui est absurde.
(iii) pour tout $x \in E, x \in f^{-1}(\{f(x)\})$, d'où (iii) ∎

IV.2 Relation d'équivalence

Définition 14 (Relation binaire) On appelle relation binaire sur E, la donnée d'une partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$.

Pour exprimer le fait qu'un couple (x, y) est dans $\mathcal{R}$, on écrit $x\mathcal{R}y$ et on dit que x et y sont en relation.

Définition 15 (relation d'équivalence) Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence si

(i) $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$ (reflexivité).
(ii) $\forall x, y \in E : x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$ (symétrie).
(iii) $\forall x, y, z \in E : (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$ (transitivité).

Exemple 14 $" = "$ dans E est relation d'équivalence.

Définition 16 (Classe d'équivalence) Si $\mathcal{R}$ est équivalence sur E et $x \in E$, la classe d'équivalence de x est la partie notée $\bar{x} = \{y \in E : x\mathcal{R}y\}$.
L'ensemble de toute les classes d'équivalence, est appelé l'ensemble quotient modulo $\mathcal{R}$, et est noté $E/\mathcal{R}$, c'est une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 15 Avec $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ ssi $f(x) = f(y)$.

Propriétés $\mathcal{R}$ étant une équivalence sur E, on a:

P IV.1 $\bar{x} = \bar{y} \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y$.

P IV.2 $E/\mathcal{R} = \{\bar{x} \mid x \in E\}$ est une partition de E. Et réciproquement toute partition de E définie une relation d'équivalence sur E.

Preuve: Voir surtout le fait que toute partition définie une équivalence ∎

IV.3 Relation d'ordre

IV.3.1 Définition - Exemples

Définition 17 On appelle relation d'ordre sur E toute relation binaire $\mathcal{S}$ qui soit

(i) $\forall x \in E : x\mathcal{S}x$ (reflexivité).
(ii) $\forall x, y \in E : (x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x) \Longrightarrow x = y$ (antisymétrie).
(iii) $\forall x, y, z \in E : (x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z) \Longrightarrow x\mathcal{S}z$ (transitivité).

Usuellement les relation d'ordre sont notées à l'aide des symboles:

$$\leq, \subset, \ll, \lll \ldots.$$

Exemple 16 $'' \leq ''$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Exemple 17 $'' \subset ''$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{P}(E)$.

IV.3.2 Ordre total, ordre partiel

Définition 18 Si pour tout (x, y) dans E on a $x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$, on dit que l'ordre est total, et que E est totalement ordonné par $\mathcal{S}$. Si non, on dit que l'ordre est partiel.

Exemple 18 $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné. Par contre $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est partiellement ordonné.

Exercice 3 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Dans $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, on définit la relation $\mathcal{S}$ par

$$X\mathcal{S}Y \Longleftrightarrow [X = Y \text{ ou } (\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq y)]$$

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.

2. Si on suppose E totalement ordonné. Est-ce que $\mathcal{S}$ est totale?

IV.3.3 Majorant, minorant, plus et petit élément

Définition 19 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, A une partie de E. Un élément m de E est appelé un majorant (resp minorant) de A, si

$$\forall a \in A : a \leq m \text{ (resp } m \leq a).$$

Si m est dans A, il est appelé plus grand élément (resp plus petit élément) de A ou maximum (resp minimum) de A. Il est noté $\max(A)$ (resp $\min(A)$).

Exemple 19 Toute partie finie de $\mathbb{N}$ admet un max et min .

Exercice 4 Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, on considère la partie $\mathcal{A} = \{A; B\}$, où A et B sont deux parties de E.

1. Donner l'ensemble des majorants et des minorants de $\mathcal{A}$.

2. A quelle condition $\mathcal{A}$ possède-t-il un max (resp un min)?