

Géométrie Euclidienne du plan et de l'espace

B. Seddoug. CPGE, Oujda

Introduction

Dans toute la suite E désigne un espace vectoriel Euclidien, de dimension $n = 2$ ou 3 . Sa norme sera notée $\|\cdot\|$ et ses éléments seront appelés indifféremment points ou vecteurs. Il est donc considéré muni conjointement de sa structure d'espace vectoriel et d'espace affine.

Pour mettre en évidence la structure euclidienne, on définit entre deux 'points' de E la distance les séparant.

Distance Euclidienne

Théorème .1 L'application $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$
 $(A, B) \mapsto d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ vérifie les propriétés suivantes:

- $d(A, B) = 0$ si et seulement si $A = B$.
- $d(A, B) = d(B, A)$.
- $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$.

On dit que d est une distance sur E .

Le réel $d(A, B)$ est appelé la distance entre A et B . On notera parfois AB au lieu de $d(A, B)$.

Définition 1 La distance ci-dessus est appelée la distance euclidienne et E espace affine euclidien.

Repère orthonormé

Définition 2 Un repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ de E est dit orthonormale ou orthonormé si la base \mathcal{B} associée est orthonormale. Il est dit directe si la base est directe.

Théorème .2 Si $A(x_1, \dots, x_n)$ et $B(y_1, \dots, y_n)$ dans un r.o.n, alors

$$d(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Dans toute la suite E sera muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n))$.

Equation normale d'un hyperplan

Dans un r.o.n l'hyperplan d'équation: $a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ est orthogonale au vecteur \vec{v} de composantes (a_1, \dots, a_n) dans la b.o.n associée au repère.

On a donc les conditions d'orthogonalité dans le plan et dans l'espace suivantes:

1. **Dans le plan:** Les droites D_1, D_2 d'équations $a_ix + b_iy + c_i = 0, i = 1, 2$. sont orthogonales (ou perpendiculaires) si et seulement si $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.
2. **Dans l'espace:** Les plans P_1, P_2 d'équations $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0, i = 1, 2$. sont perpendiculaires si et seulement si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Exemples

Exercice 1 (Ligne de niveau $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = \lambda$) Soient un vecteur \vec{v} unitaire, A un point de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etudier l'ensemble \mathcal{D} des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = \lambda$.

Solution 1 Soit le point H tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda \vec{v}$ (fig1), on a: $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} = \lambda$ donc $H \in \mathcal{D}$.

Pour tout point M on a: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{v} = \lambda + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{v}$,

Donc $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{HM} \perp \vec{v}$.

Donc \mathcal{D} est l'hyperplan passant par H et orthogonal à \vec{v} .

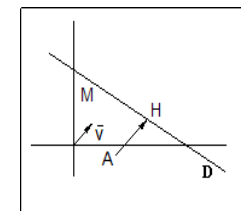


fig1

Exercice 2 (Hyperplan médiateur de deux points) Soient A et B deux points distincts de E . Déterminer l'ensemble \mathcal{H} des points M tels que $AM = BM$.

Solution 2

$$\begin{aligned} AM = BM &\iff \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 \\ &\iff (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = 0 \\ &\iff \overrightarrow{AB} \cdot 2\overrightarrow{IM} = 0 \quad I \text{ est le milieu de } [AB] \\ &\iff \overrightarrow{IM} \in (\overrightarrow{AB})^\perp. \end{aligned}$$

Donc \mathcal{H} est l'hyperplan passant par le milieu de $[AB]$ est normal à \overrightarrow{AB} .

\mathcal{H} est appelé l'hyperplan médiateur de $[AB]$.

I Orthogonalité

I.1 Projection orthogonale - Distance d'un point à un hyperplan

Définition 3 Deux s.e.a \mathcal{X} et \mathcal{Y} de directions respectives \vec{X} et \vec{Y} sont dits orthogonaux si $\vec{X} \subset \vec{Y}^\perp$ (ie $\vec{X} \perp \vec{Y}$). Si en plus $\vec{X} = \vec{Y}^\perp$, ils sont dits supplémentaires orthogonaux.

Définition 4 La projection affine sur \mathcal{X} parallèlement à \vec{X}^\perp est appelée la projection orthogonale sur \mathcal{X} . Elle sera notée $p_{\mathcal{X}}$.

La symétrie affine associée est appelée symétrie orthogonale et est notée $s_{\mathcal{X}}$. Dans le cas où \mathcal{X} est un hyperplan elle appelée réflexion.

Remarque 1 • Par définition, pour tout $M \in E$ le point $M' = p_{\mathcal{X}}(M)$ est l'unique point de \mathcal{X} tel que $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{X}$.

- $\vec{p}_{\mathcal{X}} = p_{\vec{X}}$ et $\vec{s}_{\mathcal{X}} = s_{\vec{X}}$.

Définition 5 Soit S une partie non vide de E , pour tout point M de E , on appelle distance de M à S , le réel noté aussi $d(M, S) = \inf_{P \in S} d(M, P)$.

Deux questions naturelles se posent:

1. Est ce qu'il existe un point $Q \in S$ tel que $d(M, S) = d(M, Q)$?
2. Si ce point existe, est-il unique?

La réponse est affirmative pour les deux questions dans le cas où S est un s.e.a:

Théorème I.1 Soit \mathcal{X} un s.e.a de E de direction \vec{X} . Pour tout point M de E , il existe un point unique $M' = p_{\mathcal{X}}(M)$ tel que $MM' = \inf_{P \in \mathcal{X}} d(M, P) = d(M, \mathcal{X})$.

Preuve: Pour tout $N \in \mathcal{X}$, on a: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N}$ et $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{M'N}$, donc $MN^2 = MM'^2 + M'N^2 \geq MM'^2$ avec égalité ssi $N = M'$.

I.2 Exemple: Distance d'un point à un hyperplan

Soit $\mathcal{H} : a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ un hyperplan de E . Le vecteur $\vec{v}(a_1, \dots, a_n)$ est normal à \mathcal{H} , donc pour tout point $M(x_1, \dots, x_n)$ le point $M'(x'_1, \dots, x'_n) = p_{\mathcal{H}}(M) \in \mathcal{H}$ est caractérisé par:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM'} \cdot \vec{v} = -a_0 \text{ et} \\ M' = M + \lambda \vec{v} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{OM'} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} + \lambda \|\vec{v}\|^2$, soit $\lambda = \frac{-a_0 - \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$

D'autre part $\overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{v}$ donc $d(M, \mathcal{H}) = |\lambda| \|\vec{v}\| = \frac{|-a_0 - \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2}}$.

On a donc démontré le résultat suivant.

Théorème I.2 Soit $\mathcal{H} : a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ un hyperplan de E . Pour tout point $M(x_1, \dots, x_n)$, on a

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2}}$$

Exemple 1 (Droite dans le plan) $\mathcal{D} : ax + by + c = 0, M(x, y) :$

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple 2 (Plan dans l'espace) $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0, M(x, y, z) :$

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Remarque 2 Si le plan \mathcal{P} est donné par trois points A, B et C , pour tout M on a:

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}]|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

Exemple 3 (Droite dans l'espace) \mathcal{D} est donnée par un point A et un vecteur \vec{u} . pour tout M , on a

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$$

En effet: Notons α la mesure de l'angle \widehat{HAM} (fig2.), on a $\sin \alpha = \frac{MH}{AM}$.

D'autre part $\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\| = \|\vec{u}\| \|\overrightarrow{AM}\| \sin \alpha$, donc $MH = AM \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\| \|\overrightarrow{AM}\|} = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$.

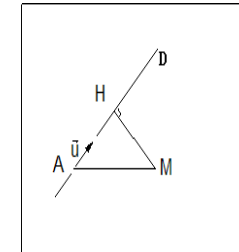


fig2

II Isométries affines

II.1 Définitions - Exemples

Définition 6 Une application affine $f : E \rightarrow E$ est une isométrie si elle conserve les distances, dans le sens:

$$\forall M, N \in E : d(f(M), f(N)) = d(M, N)$$

Proposition 1 Soit $f : E \rightarrow E$ affine.

f est une isométrie si et seulement si \vec{f} est orthogonale. En particulier toute isométrie est bijective.

Théorème II.1 L'ensemble des isométries affines est un sous groupe du groupe affine $GA(E)$. On le note $Is(E)$.

On distingue deux types d'isométries:

- Isométries positives ou déplacements.
- Isométries négatives ou antidéplacements.

Exemple 4 1. Les translations sont des isométries positives.

2. Les réflexions sont des isométries négatives.

II.2 Isométries du plan

Pour la classification des isométries on utilise l'ensemble invariant. Soit $f \in Is(E)$, $\dim E = 2$.

1^{er}Cas: $Inv(f) = E$: Alors $f = Id_E$.

2^{ème}Cas: $Inv(f) = D$ droite affine : Dans ce cas $\ker(\vec{f} - Id_E) = \vec{D}$ la direction de D .

Donc \vec{f} est une réflexion vectorielle. Donc f est la réflexion (symétrie orthogonale) affine d'axe D .

3^{ème}Cas: $Inv(f) = \{A\}$ singleton : Donc $\ker(\vec{f} - Id_E) = \{\vec{0}\}$. Donc \vec{f} est une rotation vectorielle $\vec{f} = r_\theta$.

On dit que f est la rotation affine de centre A et d'angle θ , on la note $r_{A,\theta}$.

4^{ème}Cas: $Inv(f) = \emptyset$: Donc $\ker(\vec{f} - Id_E) \neq \{\vec{0}\}$. Donc

- Oubien $\vec{f} = Id_E$ et donc f est une translation.
- Oubien \vec{f} est une symétrie vectorielle $S_{\vec{D}}$ où $\vec{D} = \ker(\vec{f} - Id_E)$. Dans ce cas on montre que $f = t_{\vec{u}} \circ s_D$ où D est une droite de direction \vec{D} et $\vec{u} \in \vec{D}$.

En effet: On a $\overrightarrow{f \circ f} = S_{\vec{D}} \circ S_{\vec{D}} = Id_E$ donc $f \circ f$ est une translation. Posons $f \circ f = t_{2\vec{u}}$.

Pour un point M posons $M' = f(M)$ et $A = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}f(M)$ (fig3), on a donc

$$f(A) = \frac{1}{2}f(M) + \frac{1}{2}f \circ f(M) = \frac{1}{2}f(M) + \frac{1}{2}(M + 2\vec{u}) = \frac{1}{2}f(M) + \frac{1}{2}f(M) + \vec{u} = A + \vec{u}$$

Donc $\vec{u} = \overrightarrow{Af(A)}$. D'autre part $f \circ f(A) = A + 2\vec{u} = f(A) + \vec{u}$, donc $\overrightarrow{f(A)f \circ f(A)} = \vec{u} = \overrightarrow{Af(A)}$, Par suite $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$ c'est à dire que $\vec{u} \in \vec{D}$.

Par ailleurs si on pose $s = t_{-\vec{u}} \circ f$, on a:

$$\begin{cases} s(A) = f(A) - \vec{u} = f(A) + \overrightarrow{f(A)A} = A \\ \vec{s} = \vec{f} = S_{\vec{D}} \text{ symétrie vectorielle.} \end{cases}$$

Donc s vérifie la situation du 2^{ème}Cas, s est donc la symétrie orthogonale par rapport à $D = A + \vec{D}$, et $f = t_{\vec{u}} \circ s$.

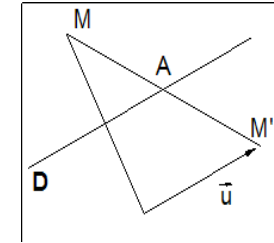


fig3

Remarque 3 Dans ce cas $t_{\vec{u}}$ et s commutent.

Résumé

$Inv(f)$	Déplacements	Antidéplacements
E	Id_E	
Droite D		Réflexion d'axe D
Un point A	Rotation de centre A et d'angle non nul	
\emptyset	Translation de vecteur non nul	Composée (commutative) d'une réflexion d'axe D et d'une translation de vecteur non nul directeur de D

Remarque 4 Dans le cas où $f = t_{\vec{u}} \circ s_D$, pour déterminer \vec{u} , on calcule $f \circ f = t_{2\vec{u}}$.

II.3 Isométrie de l'espace

Comme pour le cas de la dimension 2, la classification des isométries se fait à l'aide de l'ensemble des points invariants.

Soit donc $f \in Is(E)$, $\dim(E) = 3$, on distingue les cas suivants:

1^{er}Cas: $Inv(f) = E$: Alors $f = Id_E$.

2^{ème}Cas: $Inv(f) = \mathcal{P}$ plan affine : Dans ce cas $\ker(\vec{f} - Id_E) = \vec{P}$ la direction de \mathcal{P} . Donc \vec{f} est une réflexion vectorielle. Donc f est la réflexion (symétrie orthogonale) affine de plan \mathcal{P} .

3^{ème}Cas: $Inv(f) = D$ droite affine : Dans ce cas $\ker(\vec{f} - Id_E) = \vec{D}$ la direction de D . Donc \vec{f} est une rotation vectorielle d'axe D et d'angle non nul θ . On dit que f est la rotation affine d'axe D et d'angle θ .

4^{ème}Cas: $Inv(f) = \{A\}$ singleton : Donc $\ker(\vec{f} - Id_E) = \{\vec{0}\}$. Donc \vec{f} est la composée d'une rotation et d'une réflexion. On montre que f est la composée commutative d'une réflexion de plan \mathcal{P} et d'une rotation d'axe D orthogonal à \mathcal{P} . (H.P).

5^{ème}Cas: $Inv(f) = \emptyset$: Dans ce cas le programme se limite aux déplacements!

On suppose donc f isométrie positive. Donc $\ker(\vec{f} - Id_E) \neq \{\vec{0}\}$ et comme $\vec{f} \in O^+(E)$ alors $\vec{f} = Id_E$ ou \vec{f} est rotation d'axe $\vec{D} = \ker(\vec{f} - Id_E)$.

- Si $\vec{f} = Id_E$ alors f est une translation.

- Si $\vec{f} = r_{\vec{D},\theta}$ avec $\vec{D} = \ker(\vec{f} - Id_E)$. Comme dans le 4^{ème} Cas de la section précédente, on cherche un vecteur $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - Id_E)$ de la forme $\overrightarrow{Af(A)}$

En effet: On a $\overline{\ker(\vec{f} - Id_E)^\perp} = \text{Im}(\vec{f} - Id_E)$ (vérifier cette égalité).

Fixons donc un point O et posons $\overrightarrow{Of(O)} = \vec{u} + (\vec{f} - Id_E)(\vec{v})$ avec $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - Id_E)$ et $\vec{v} \in E$.

pour tout point M on a:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Mf(M)} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)} \\ &= \overrightarrow{Of(O)} - \overrightarrow{OM} + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) \\ &= \vec{u} + (\vec{f} - Id_E)(\vec{v} - \overrightarrow{OM}). \end{aligned}$$

Donc si on prend A tel que $\overrightarrow{OA} = -\vec{v}$, on a bien $\overrightarrow{Af(A)} = \vec{u} \in \ker(\vec{f} - Id_E)$.

D'autre part si on pose $g = t_{-\vec{u}} \circ f$, on a

$$\begin{cases} g(A) = f(A) - \vec{u} = f(A) + \overrightarrow{f(A)A} = A \\ \vec{g} = \vec{f} = r_{\vec{D},\theta} \text{ rotation vectorielle.} \end{cases}$$

Donc g vérifie la situation du 3^{ème} Cas, g est donc la rotation affine d'axe $\mathcal{D} = A + \vec{D}$ et d'angle θ , et $f = t_{\vec{u}} \circ g$.

Remarque 5 Dans ce cas $t_{\vec{u}}$ et g commutent. On dit que f est le vissage de vecteur \vec{u} d'axe \mathcal{D} et d'angle θ .

Résumé :

$Inv(f)$	Déplacements	Antidéplacements
E	Id_E	
Plan \mathcal{P}		Réflexion de plan \mathcal{P}
Droite \mathcal{D}	Rotation d'axe \mathcal{D} et d'angle non nul	
\emptyset	Translation de vecteur non nul.	H.P
	Vissage: Composée (commutative) d'une rotation d'axe \mathcal{D} et d'une translation de vecteur non nul directeur de \mathcal{D} : $t_{\vec{u}} \circ r_{\mathcal{D},\theta}$ tq $\vec{u} \in \vec{D}$.	

III Similitudes du plan

III.1 Définitions - Exemples

Dans toute la suite E est le plan affine euclidien orienté.

Définition 7 On appelle similitude affine de rapport $k > 0$, toute application affine f de E telle que

$$\forall M, N \in E : d(f(M), f(N)) = k.d(M, N).$$

On notera $Sim(E)$ l'ensemble des similitudes de E .

propriétés

P III.1 Les similitudes conservent les rapports des distances:

$$\text{Pour tout } M, N, P, Q \text{ d'images } M', N', P', Q' \text{ on a: } \frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}.$$

P III.2 Les similitudes conservent les angles non orientés:

$$\text{Pour tout } M, N, P \text{ d'images } M', N', P' \text{ on a: } \widehat{MNP} = \widehat{M'N'P'}.$$

Preuve: P.III.1: $M'N' = k.MN$ et $P'Q' = k.PQ$ donc $\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{k.MN}{k.PQ} = \frac{MN}{PQ}$.

P.III.2: $\overrightarrow{NM}^2 = k^2 \cdot \overrightarrow{N'M'}^2$ et $\overrightarrow{NP}^2 = k^2 \cdot \overrightarrow{N'P'}^2$ et $(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP})^2 = k^2 \cdot (\overrightarrow{N'M'} + \overrightarrow{N'P'})^2$,

Donc $\overrightarrow{NM}^2 + \overrightarrow{NP}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = k^2 \cdot (\overrightarrow{N'M'}^2 + \overrightarrow{N'P'}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{N'M'} \cdot \overrightarrow{N'P'})$,

Par suite $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = k^2 \cdot \overrightarrow{N'M'} \cdot \overrightarrow{N'P'}$, c.à.d $\cos \widehat{MNP} = \cos \widehat{M'N'P'}$. .

Exemples:

1. Toute isométrie affine est une similitude de rapport 1.
2. L'homothétie $h_{\Omega,k}$ est une similitude de rapport $|k|$.
3. En général toute composée $h_{\Omega,k} \circ g$ où g est une isométrie et $k \notin \{0;1\}$, est une similitude de rapport $|k|$.

Réciproquement toute similitude est composée d'une homothétie et d'une isométrie:

Proposition 2 Si f est une similtude de rapport k alors pour toute homothétie $h_{\Omega,k}$ de rapport k , $g = h_{\Omega,k}^{-1} \circ f$ est une isométrie. Et donc $f = h_{\Omega,k} \circ g$.

Remarque 6 Toute similitude est inversible.

On distingue alors deux types de similitudes:

- Similitudes directes, si $\det(\vec{f}) > 0$. Comme pour les isométries positives, leur ensemble $Sim^+(E)$ constitue un sous groupe du groupe affine.
- Similitude indirectes, si $\det(\vec{f}) < 0$.

On vérifie que $f \in Sim^+(E)$ si et seulement si $\frac{1}{k}\vec{f} \in O^+(E)$, k étant le rapport de f .

Théorème III.1 (Centre d'une similitude) Si $k \neq 1$, toute similitude de rapport k possède un point fixe et un seul. Il est appelé centre de la similitude.

Preuve: Si $k \neq 1$, alors $\ker(\vec{f} - Id_E) = \{\vec{0}\}$ donc f possède un unique point fixe. .

Remarque 7 Si f est une similitude directe de rapport $k \neq 1$ et de centre Ω , alors $f = h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta}$ (composée commutative). On dit alors que f est la similitude directe de rapport k et de centre Ω et d'angle θ .

III.2 Représentation paramétrique d'une similitude directe

Soit f une similitude de rapport $k > 0$. Le plan affine euclidien étant muni d'un repère o.n direct.

- Si $k = 1$ f est une isométrie positive, elle admet donc une représentation paramétrique de la forme

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1.$$

- Si $k \neq 1$ alors $f = h_{\Omega, k} \circ r_{\Omega, \theta}$ avec $\Omega(x_0, y_0)$ son centre, on a donc

$$f : M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \Omega + k \cdot \overrightarrow{\Omega r_{\Omega, \theta}(M)} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \alpha x - \beta y + \gamma \\ \beta x + \alpha y + \gamma \end{pmatrix}$$

Avec $a^2 + b^2 = 1$. Donc la représentation paramétrique de f s'écrit:

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \text{ avec } a^2 + b^2 = k^2. \quad (1)$$

III.3 Ecriture complexe d'une similitude directe

Si $M(z = x + iy)$ est un point du plan complexe d'affixe z et $M'(z' = x' + iy')$ désigne son image par la similitude donnée par (1) alors on a:

$$z' = (ax - by) + i(bx + ay) + (c + ic') = (a + ib)z + (c + ic')$$

Réciproquement si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \alpha z + \beta$ avec α et β deux complexes donnés, alors f la similitude donnée par (1) avec $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + ic'$, donc de rapport $|\alpha|$.

Proposition 3 L'application $f : z \mapsto \alpha z + \beta$ avec $\alpha \neq 1$ (ie: $f \neq$ translation) est la similitude de rapport $|\alpha|$, d'angle $\theta = \arg(\alpha)$ et de centre $z_0 = \frac{\beta}{1 - \alpha}$.

Exercice 3 Soient $A \neq B$ et $A' \neq B'$ des points du plan. Il existe une similitude directe et une seule f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.