

Nombres entiers naturels, Ensembles finis, dénombrements.

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

I Nombres entiers naturels

I.1 Propriétés fondamentales

L'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels est muni:

1. de deux l.c.i, addition et multiplication.

- L'addition $+$ est commutative, associative et admet 0 pour élément neutre. En plus, on a la propriété:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : (a + b = 0 \iff a = b = 0).$$

- La multiplication \times est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition et admet 1 pour élément neutre. En plus, on a les propriétés:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : (ab = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0).$$

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : (ab = 1 \iff a = b = 1).$$

2. d'une relation d'ordre notée \leq appelé ordre naturel entre les entiers, définie par

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : (a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{N} \mid b = a + c).$$

qui vérifie les propriétés suivantes:

- (\mathbb{N}, \leq) est totalement ordonné, en plus \leq est compatible avec les lois $+$ et \times .
- 0 est le plus petit élément de \mathbb{N} , et \mathbb{N} n'est pas majoré.
- Tout entier n admet un successeur $n + 1$, avec $n < n + 1$ et

$$\forall p, q \in \mathbb{N} : (p < q \iff p + 1 \leq q)$$

ie: il n'y a aucun entier entre un entier et son successeur.

- Tout entier $n \neq 0$ admet un prédécesseur $n - 1$.

On admet que \mathbb{N} vérifie la propriété suivante, connue sous le nom de *axiome de récurrence*:

3. Pour toute partie A de \mathbb{N} , on a:

$$\left. \begin{array}{l} (i) 0 \in A \\ (ii) \forall n \in \mathbb{N} : n \in A \implies n + 1 \in A \end{array} \right\} \implies A = \mathbb{N}.$$

I.1.1 Principe de récurrence

Théorème I.1 (dit de récurrence) Soit $P(n)$ une assertion dépendant de la variable n dans \mathbb{N} . On suppose que:

- (i) $P(0)$ est vrai,
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \implies P(n + 1)$, on dit que $P(n)$ est héréditaire.

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve: Considérer $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$.

Remarque 1 Une variante du principe de récurrence s'obtient, en modifiant (i) et (ii) ci-dessus, comme suit:

- (i) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid P(n_0)$ est vrai,
- (ii) $\forall n \geq n_0 : P(n) \implies P(n + 1)$.

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Théorème I.2 Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.

Preuve: Soit $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. On note M l'ensemble des minorants de A .

$0 \in M$ et $M \neq \mathbb{N}$, donc M ne vérifie pas la propriété (ii) de l'axiome de récurrence. C'est à dire:

$$\exists n_0 \in M \mid n_0 + 1 \notin M$$

On montre alors que $n_0 \in A$. En effet, si par absurde on suppose que $n_0 \notin A$ alors $\forall n \in A : n_0 < n$, donc $\forall n \in A : n_0 + 1 \leq n$, c'est à dire que $n_0 + 1 \in M$, ce qui absurde .

Corollaire I.3 (récurrence forte) Soit $P(n)$ une assertion dépendant de la variable n dans \mathbb{N} . On suppose que:

- (i) $P(0)$ est vrai,
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N} : (P(0) \text{ et } P(1) \text{ et } \dots \text{ et } P(n)) \implies P(n + 1)$.

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve: Considérons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$, par absurde supposons que $B = \mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset$, Alors B possède un minimum $n_0 > 0$. Donc $\forall p < n_0 : p \in A$ et d'après (ii) du corollaire $P(n_0)$ est vraie, ce qui contredit le fait que $n_0 \in B$.

Exemple 1 (principe de descente infinie de Fermat) Il n'existe aucune suite strictement décroissante dans \mathbb{N} .

En effet si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante dans \mathbb{N} , alors l'ensemble $U = \{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas de minimum, ce qui est absurde.

Théorème I.4 Toute partie non vide et majorée de \mathbb{N} admet un plus grand élément.

Preuve: Soit $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. On note M l'ensemble des majorants de A et $m_0 = \min(M)$.

Si $m_0 \notin A$ alors $\forall n \in A : n < m_0$, donc $m_0 \neq 0$ et $\forall n \in A : n \leq m_0 - 1$, ce qui contredit le fait que $m_0 = \min(M)$.

I.1.2 Division euclidienne

Théorème I.5 $\forall (a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*, \exists!(q, r) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b$.
 q : quotient, r : reste dans la division euclidienne de a par b .

Preuve: La faire en exercice.. s'inspirer de la démonstration dans \mathbb{R} .
 Considérer $A = \{n \in \mathbf{N} \mid nb \leq a\}$. $A \neq \emptyset$ et majoré, on pose $q = \max(A)$,
 alors $q + 1 \notin A$ c'est à dire $r = a - qb < b$, d'autre part $r \geq 0$, d'où l'existence.
 Pour l'unicité, on raisonne par absurde .

I.2 Notion de suites

Définition 1 Soit E un ensemble non vide, on appelle suite d'éléments de E toute application de \mathbf{N} (ou d'une partie de \mathbf{N}) dans E .

Notation $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ou $(u_n)_{n \in I}$ avec $I \subset \mathbf{N}$, où pour tout $n, u_n \in E$.

Théorème I.6 (admis) Soit E un ensemble non vide, $f : E \rightarrow E$ et $a \in E$.
 Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E , unique telle que:

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est définie par une relation de récurrence.

Exemple 2 Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométrique.

II Ensembles finis

II.1 Cardinal d'un ensemble fini

Lemme II.1 Soit $(p, q) \in \mathbf{N}^{*2}$; on a:

- (i) $p \leq q \iff (\exists f : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket \text{ injective})$.
- (ii) $p \geq q \iff (\exists f : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket \text{ surjective})$.

Preuve: (i) \implies si $p \leq q$, alors $\llbracket 1, p \rrbracket \subset \llbracket 1, q \rrbracket$ et f : injection canonique.
 \impliedby Par récurrence sur p en considérant la proposition:

$$P(p) : \llcorner \forall q \in \mathbf{N}^*, \text{ s'il existe une injection de } \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket \text{ alors } p \leq q \llcorner$$

- $p = 1$, on a $\forall q \in \mathbf{N}^* : 1 \leq q$ donc $P(1)$ est vraie.
- Supposons $P(p)$ vraie, et soit $q \in \mathbf{N}^*$ et $f : \llbracket 1, p + 1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket$ injective.

D'abord $q \geq 2$; on distingue les deux cas: $f(p + 1) = q$ et $f(p + 1) < q$:

1^{er} cas : $f(p + 1) = q$, alors $f' : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, q - 1 \rrbracket$; $x \mapsto f(x)$ est une application injective et d'après le HR, $p \leq q - 1$ c.à.d $p + 1 \leq q$.

2^{ème} cas : $f(p + 1) = q' < q$, on considère $\tau : \llbracket 1, q \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket$ telle que

$$\begin{cases} \tau(q) = q'; \tau(q') = q \text{ et} \\ \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket \mid i \neq q \text{ et } i \neq q' : \tau(i) = i \end{cases}$$

et on considère $\tau \circ f : \llbracket 1, p + 1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket$ injective et telle que $\tau \circ f(p + 1) = q$, donc d'après le 1^{er} cas, $p + 1 \leq q$.

(i) \implies si $p \geq q$, alors $\llbracket 1, q \rrbracket \subset \llbracket 1, p \rrbracket$ et l'application $f : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket$ telle que

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket : f(i) = i \text{ et} \\ \forall i \in \llbracket q + 1, p \rrbracket : f(i) = q. \end{cases}$$

est surjective.

\impliedby Soit $f : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket$ surjective, considérons $g : \llbracket 1, q \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$ telle que, $g(k) = \min f^{-1}(\{k\})$. On montre que g est injective, en effet si $g(k) = g(h)$ alors $f^{-1}(\{k\}) \cap f^{-1}(\{h\}) \neq \emptyset$, donc il existe i tel que $f(i) = k$ et $f(i) = h$, donc $h = k$.

Remarque 2 On déduit du lemme que

$$\bullet p = q \iff (\exists f : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket \text{ bijective}).$$

Définition 2 Deux ensembles E et F sont dits *équipotents*, s'il existe une bijection de E dans F .

Définition 3 Un ensemble E est dit *fini*, s'il existe un entier n non nul et une bijection $\varphi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow E$. Par convention, on dira que l'ensemble vide est fini.
 Si non, on dit que E est *infini*.

Exemple 3 Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $\llbracket 1, m \rrbracket$ est fini.
 Pour tout $p \leq q \in \mathbf{N}$, $\llbracket p, q \rrbracket$ est fini.

Théorème II.1 Si E est un ensemble fini, alors l'entier n de la définition précédente est unique. On dit que E est de *cardinal* n , on note $\text{card}(E) = n$ ou $|E| = n$.
 Par convention $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Preuve: Si $\varphi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow E$ et $\varphi' : \llbracket 1, n' \rrbracket \rightarrow E$ sont deux bijections alors $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ définit une bijection de $\llbracket 1, n' \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$, donc d'après le lemme précédent $n = n'$.

Exemple 4 $\text{card}(\llbracket 1, m \rrbracket) = m$, et $\text{card}(\llbracket m, n \rrbracket) = n - m + 1$.

II.2 Applications entre ensembles finis

Théorème II.2 Soient E et F deux ensembles finis, p et q tels que $\text{card}(E) = p$, $\text{card}(F) = q$. Alors on a:

- (i) $p \leq q \iff (\exists f : E \rightarrow F \text{ injective})$.
- (ii) $p \geq q \iff (\exists f : E \rightarrow F \text{ surjective})$.
- (iii) $p = q \iff (\exists f : E \rightarrow F \text{ bijective})$.

Preuve: $E \xrightarrow{\text{bijective}} \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket \xrightarrow{\text{bijective}} F$... et le lemme précédent .

Corollaire II.3 Soient E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, et $f : E \rightarrow F$. Alors f injective ssi f surjective ssi f bijective.

Preuve: Soit $p = \text{card}(E) = \text{card}(F)$, E et F sont équipotents, on peut donc supposer $E = F = \llbracket 1, p \rrbracket$, et $f : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$.

- Supposons f injective, si f n'est pas surjective alors $\text{Im } f \subsetneq \llbracket 1, p \rrbracket$, on distingue deux cas:
 - $p \notin \text{Im } f$: alors f induit une injection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$, ce qui est absurde.
 - $p \in \text{Im } f$: on considère $g = \tau_{p,k} \circ f$, où $k \notin \text{Im } f$, alors $g : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$ injective et $p \notin \text{Im } g$, ce qui est absurde, d'après le cas précédent.
- Supposons f surjective, si f n'est pas injective alors il existe $i \neq j$ tels que $f(i) = f(j)$ (quite à considérer $f \circ \tau_{i,p}$, on peut supposer que $f(p) = f(i)$ avec $i < p$). Donc f induit une surjection de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, ce qui est absurde.

Ce qui achève la démonstration .

Remarque 3 On peut déduire que l'ensemble \mathbb{N} est infini, $n \mapsto n+1$ injective et non surjective... Et on peut caractériser les ensembles infinis par:

Théorème II.4 Un ensemble E est infini, si et seulement s'il existe une application $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ injective.

Preuve: Si E est infini, on construit par récurrence une application f injective de \mathbb{N} dans E par:

$$f(0) = x_0 \in E, \text{ et pour tout } n, f(n+1) = x_{n+1} \in E \setminus \{x_0, \dots, x_n\}.$$

Réciproquement si $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ injective, on construit $g : E \rightarrow E$, par:

$$\begin{cases} \forall x \in E \setminus \text{Im } f : g(x) = x, \\ \forall n \in \mathbb{N} : g(f(n)) = f(n+1). \end{cases}$$

et on montre que g est injective mais pas surjective .

Théorème II.5 Soit F un ensemble fini et E tel qu'il existe une application $\exists f : E \rightarrow F$ injective, alors E est fini et $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.

Preuve: Si on suppose par absurde E infini alors $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{injective}} E \xrightarrow{\text{injective}} F$, ce qui contredit le fait que F est fini .

Corollaire II.6 Si F est fini et $E \subset F$, alors E est fini et $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Corollaire II.7 Les parties finies de \mathbb{N} sont les parties majorées.

Preuve: En effet si $A \subset \mathbb{N}$ est majorée, avec $m = \max A$, on a $A \subset \llbracket 0, m \rrbracket$ qui est fini. .

II.3 Opérations sur les ensembles finis

Théorème II.8 Soient E et F deux ensembles finis. $E \cup F$ est fini, et on a

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F).$$

Preuve: On traite d'abord le cas $E \cap F = \emptyset$: si $f : E \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ bijective et $g : E \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ bijective, on considère $h : E \rightarrow \llbracket 1, m+n \rrbracket$, telle que:

$$\begin{cases} \forall x \in E : h(x) = f(x), \\ \forall x \in F : h(x) = g(x) + n. \end{cases}$$

h est bijective. Si $E \cap F \neq \emptyset$, on écrit $E = (E \cap F) \cup (E \setminus F)$, $F = (E \cap F) \cup (F \setminus E)$ et $E \cup F = (E \cap F) \cup (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$. Donc

$$\begin{aligned} \text{card}(E \cup F) &= \text{card}(E \cap F) + \text{card}(E \setminus F) + \text{card}(F \setminus E) \\ &= \text{card}(E \cap F) + (\text{card}(E) - \text{card}(E \cap F)) + (\text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)) \\ &= \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F). \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration .

Exercice 1 $\text{card}(E \cup F \cup G)$?

Remarque 4 Si A_1, A_2, \dots, A_k sont des parties deux à deux disjointes d'un ensemble fini alors

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \text{card}(A_i).$$

Théorème II.9 Soient E et F deux ensembles finis. $E \times F$ est fini, et on a

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \cdot \text{card}(F).$$

Preuve: On pose $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$, et on raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.

- Si $n = 1$ alors $E = \{a\} : E \times F \rightarrow F; (a, y) \mapsto y$ est bijective.
- On suppose la relation vraie pour n quelque soit p .
- Soit $E = E' \cup \{a\}$ de cardinal $n+1$, $E \times F = (E' \times F) \cup (\{a\} \times F)$ union disjointe.

Ce qui achève la démonstration .

III Dénombrements

On définit pour tout entier naturel $n \neq 0$, factoriel n comme étant l'entier noté $n!$ tel que

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n \text{ et on convient que } 0! = 1.$$

III.1 Le principe des bergers et conséquences

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$, $\varkappa_E : E \rightarrow \mathbb{N}; x \mapsto 1$, alors on a

$$\text{card}(E) = \sum_{x \in E} \varkappa_E(x) = \sum_{x \in E} 1 \tag{1}$$

Preuve: Par récurrence sur n .

Si $n = 1$, posons $E = \{a\}$ alors $\sum_{x \in E} \varkappa_E(x) = \varkappa_E(a) = 1 = \text{card}(E)$.

Supposons la propriété vraie pour n . Soit E de cardinal $n+1$, posons $E = E' \cup \{a\}$, avec $\text{card}(E') = n$. $\text{card}(E) = 1 + \text{card}(E') = 1 + \sum_{x \in E'} \varkappa_{E'}(x) = \sum_{x \in E} \varkappa_E(x)$, cqfd .

Remarque 5 La relation (1) exprime le fait *pratique* que le cardinal de E est égal au nombre d'éléments de E .

Exemple 5 $n = \sum_{i=1}^n 1$.

Exercice 2 calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} 1$; $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$.

Théorème III.1 (Principe des bergers) Soit E un ensemble, (A_1, \dots, A_k) un partage de E (ie: $E = \bigcup_{i=1}^k A_i$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$). Alors $\text{card}(E) = \sum_{i=1}^k \text{card}(A_i)$.

Remarque 6 La relation (1) et le principe des bergers, sont les bases de l'analyse combinatoire.

Théorème III.2 Soient E et F finis alors F^E est fini est $\text{card}(F^E) = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}$.

Preuve: par récurrence sur $n = \text{card}(E)$.

Si $n = 1$, posons $E = \{a\}$, l'application $\varphi : F^E \rightarrow F; f \mapsto f(a)$ est bijective, donc F^E est fini et $\text{card}(F^E) = \text{card}(F)$.

Supposons la propriété vraie pour n . Soit E de cardinal $n + 1$, posons $E = E' \cup \{a\}$, avec $\text{card}(E') = n$. Pour tout $b \in F$, posons

$$\mathcal{E}_b = \{f \in F^E \mid f(a) = b\}$$

Pour tout $b \in F$, l'application

$$\psi : \mathcal{E}_b \rightarrow F^{E'}; f \mapsto f|_{E'}$$

est bijective, donc \mathcal{E}_b est fini et $\text{card}(\mathcal{E}_b) = p^n$, d'après l'hypothèse de récurrence.

On montre que $(\mathcal{E}_b)_{b \in F}$ est une partition de F^E , et on déduit que

$$\text{card}(F^E) = \sum_{b \in F} \text{card}(\mathcal{E}_b) = p^n \cdot p = p^{n+1}$$

Ce qui achève la démonstration .

Corollaire III.3 Si E est fini de cardinal n , alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, et on a: $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$.

Preuve: $\mathcal{P}(E)$ est équipotent à $\{0; 1\}^E$.

III.2 Arrangements

Théorème III.4 (Nombres d'injections) Soient E et F finis, $p = \text{card}(E)$, $n = \text{card}(F)$ tels que $p \leq n$. Le nombre des applications injectives de E dans F est:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n+1)\dots(n-p+1) = \prod_{i=1}^p (n-p+i)$$

appelé le nombre d'arrangements sans répétition de n objets pris p à p .

Remarque 7 le nombre d'arrangements avec répétition de n objets pris p à p est $\text{card}(E^p)$.

Preuve: Par récurrence sur $p = \text{card}(E)$. On note $\mathcal{I}(E, F)$ l'ensemble des applications injectives de E dans F .

Si $p = 1$, avec $\text{card}(F) = n \geq 1$, toute application de E dans F est injective, donc $\text{card}(\mathcal{I}(E, F)) = \text{card}(F^E) = n$.

Supposons la propriété vraie pour p . Soit E de cardinal $p + 1$, posons $E = E' \cup \{a\}$, avec $\text{card}(E') = p$. Pour tout $b \in F$, posons

$$\mathcal{J}_b = \{f \in \mathcal{I}(E, F) \mid f(a) = b\}$$

Pour tout $b \in F$, l'application

$$\psi : \mathcal{J}_b \rightarrow \mathcal{I}(E', F \setminus \{b\}); f \mapsto f_b : x \mapsto f(x)$$

est bijective, donc \mathcal{J}_b est fini et $\text{card}(\mathcal{J}_b) = A_{n-1}^p$, d'après l'hypothèse de récurrence.

D'autre part $(\mathcal{J}_b)_{b \in F}$ est une partition de $\mathcal{I}(E, F)$, donc

$$\text{card}(\mathcal{I}(E, F)) = \sum_{b \in F} A_{n-1}^p = n \cdot A_{n-1}^p = n \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!} = \frac{n!}{(n-(p+1))!} = A_n^{p+1}$$

Ce qui achève la démonstration .

Model: Tirage dans une population de taille n d'un échantillon ordonnée de taille p sans remise.

Remarque 8 Avec remise correspond à avec répétition.

Théorème III.5 Si $\text{card}(E) = \text{card}(F) = n$, alors le nombre de bijections de E dans F est $n!$.

En particulier: $\text{card}(\mathcal{S}_n) = n!$, où \mathcal{S}_n est l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

III.3 Combinaisons

Théorème III.6 Soient E fini de cardinal $n \geq 1$, et $0 \leq p \leq n$. Le nombre de parties de E à p éléments est

$$\mathbb{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{1}{p!} A_n^p.$$

Preuve: On note $\mathcal{F}_p(E)$ l'ensemble des parties à p éléments de E ; l'application

$$\varphi : \mathcal{I}(\llbracket 1, p \rrbracket, E) \rightarrow \mathcal{F}_p(E) \\ f \mapsto \text{Im } f$$

est surjective, et le principe des bergers implique

$$A_n^p = \text{card}(\mathcal{I}(\llbracket 1, p \rrbracket, E)) = \sum_{A \in \mathcal{F}_p(E)} \text{card}(\varphi^{-1}(A)).$$

Et pour tout $A \in \mathcal{F}_p(E) : \varphi^{-1}(A) = \{f \in \mathcal{I}(\llbracket 1, p \rrbracket, E) \mid \text{Im } f = A\}$ et

$$\varphi_A : \varphi^{-1}(A) \rightarrow \mathcal{I}(\llbracket 1, p \rrbracket, A) \\ f \mapsto f|_A$$

est bien une application et elle est bijective, donc $\text{card}(\varphi^{-1}(A)) = \text{card}(\mathcal{I}(\llbracket 1, p \rrbracket, E)) = p!$.

On déduit donc que $A_n^p = \text{card}(\mathcal{F}_p(E)) \cdot p!$, c.à.d que $\text{card}(\mathcal{F}_p(E)) = \frac{1}{p!} A_n^p$ cqfd .

Modél: Nombre de combinaisons de p objet dans une population de taille n .

Remarque 9 Si $p > n$, on pose $C_n^p = 0$.

Propriétés

$$\text{P III.1} \quad C_n^p = C_n^{p-1}. \quad C_n^{p+1} = \frac{n-p}{p+1} C_n^p. \quad C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}.$$

$$\text{P III.2} \quad \sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n.$$

$$\text{P III.3} \quad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} : \text{relation de Pascal}$$

Triangle de Pascal

$n = 1.$	1	1				
$n = 2.$	1	2	1			
$n = 3.$	1	3	3	1		
$n = 4.$	1	4	6	4	1	
$n = 5.$	1	5	10	10	5	1
					

Exercice 3 Combinaison avec répétition

$$K_p^p = C_{n+p-1}^{n-1} \text{ (nombre de solution dans } \mathbb{N}^n \text{ de l'équation: } x_1 + x_2 + \dots + x_n = p).$$

Exercice 4 Dérangements...