Dérivation des fonctions à valeurs réelles

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda.

I Fonction dérivée

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. I étant un intervalle.

I.1 Définitions - Exemples

Définition 1 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$.On note alors $f'(a)$ cette limite, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Le réel $f'a)$ est appelé le nombre dérivé de f en a.

Remarque 1 Cela suppose donc que a est un point intérieur I.

Définition 2 Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I et la fonction

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto f'(x)$$

est la fonction dérivée de f sur I.

Exemple 1

1. La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

2. $f : x \longmapsto ax + b$; $f'(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 3 (Dérivée à droite et à gauche) On dit que f est dérivable à gauche (resp à droite) en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite à gauche (resp à droite) en a. On note alors $f'_g(a)$ (resp $f'_d(a)$) cette limite. On a donc:

$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ et } f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Interprétation géométrique

Si f est dérivable en a alors

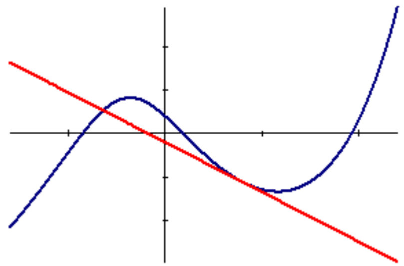
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\underbrace{\left\{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right\}}_{=\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0}$$

Donc f admet le DL d'ordre 1 au voisinage de a suivant:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a).$$

On peut donc approcher, au voisinage de a la quantité $f(x)$ par l'expression affine $f(a) + f'(a)(x - a)$.

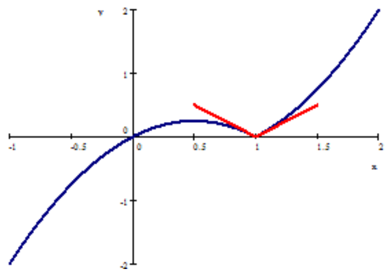
Définition 4 La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée la tangente de f au point d'abscisse a.



Tangente à une courbe

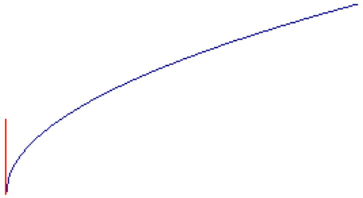
Remarque 2 Si la fonction f est dérivable à gauche (resp à droite), on parle de demi-tangente.

Exemple 2 $f(x) = x\,|x - 1|$ en $a = 1$. On a $f'_d(1) = 1$ et $f'_g(1) = -1$.

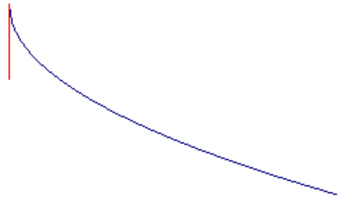


Point anguleux

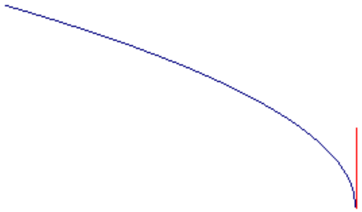
Remarque 3 Si la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ à droite et/ou à gauche en a la courbe admet une tangente ou demi-tangente verrticale.



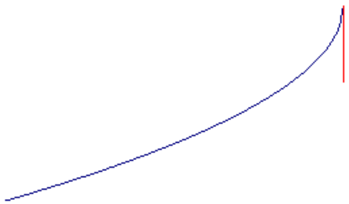
$$\lim_{a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$$



$$\lim_{a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$



$$\lim_{a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$



$$\lim_{a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$$

I.2 Propriétés

Théorème I.1 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. f est dérivable en a.
2. f admet un DL d'ordre 1 en a.
   Dans ce cas $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.
3. Il existe une fonction φ définie sur I, continue en a telle que: $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a)$.
   Dans ce cas $f'(a) = \varphi(a)$.

Théorème I.2 Si f est dérivable en a alors elle est continue en a.

Remarque 4 La réciproque est fausse. $x \longmapsto |x|$ en 0.

Théorème I.3 (CN d'extrêmum) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. Alors f admet un extrêmum en a si et seulement si $f'(a) = 0$.

Remarque 5 La réciproque est fausse. $x \longmapsto x^3$ en 0.

Remarque 6 a n'est pas une extrémité de I.

Définition 5 Un point a tel que $f'(a) = 0$ est dit point critique de f.

I.3 Opérations sur les fonctions dérivables

P I.1 (Somme) si f et g sont dérivables sur I alors $f+g$ est dérivable sur I et on a:

$$\forall x \in I : (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

P I.2 (Produit) si f et g sont dérivables sur I alors $f \times g$ est dérivable sur I et on a:

$$\forall x \in I : (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

P I.3 (Quotient) si f et g sont dérivables sur I et g ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a:

$$\forall x \in I : (\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

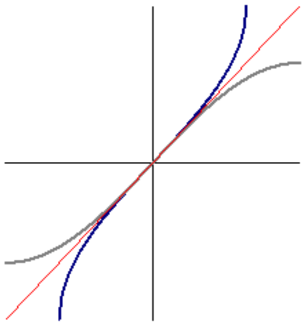
$f(x)$	$f'(x)$	D_f
$x^m; m \in \mathbb{N}$	mx^{m-1}	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

P I.4 (Application réciproque) Soit $f : I \longrightarrow J$ bijective, dérivable sur I, alors en tout point $y = f(x) \in J$ tel que $f'(x)$ n'est pas nulle, on a:

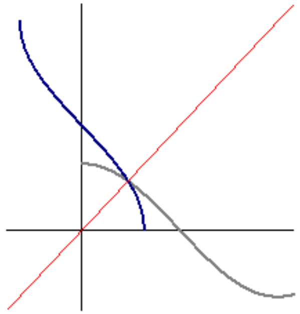
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

$f(x)$	$f'(x)$	D_f et $D_{f'}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1,1]$ et $]-1,1[$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1,1]$ et $]-1,1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

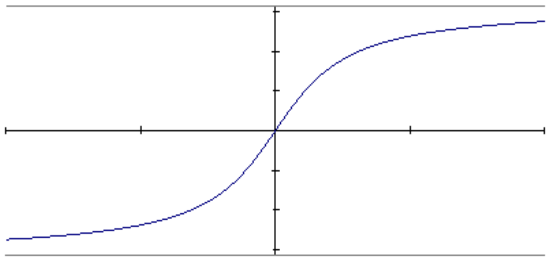
Graphiques des réciproques des fonctions circulaires



$\sin x$ et $\arcsin x$



$\cos x$ et $\arccos x$



$\arctan x$

P I.5 (Composée d'applications) Si f est dérivable sur I et g dérivable sur $J \supset f(I)$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a:

$$\forall x \in I : (g \circ f)'(x) = f'(x) g'(f(x)).$$

Preuve: On pose $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a)$ et $g(y) = g(f(a)) + \psi(y)(y - f(a))$.
Donc $g(f(x)) = g(f(a)) + \psi(f(x))(f(x) - f(a)) = g(f(a)) + \underbrace{\psi(f(x))\varphi(x)}_{\Phi(x)}(x-a)$

Φ étant continue en a donc $g \circ f$ est dérivable en a et on a:
$(g \circ f)'(a) = \psi(f(a))\varphi(a) = g'(f(a))f'(a)$. ▪

Exemple 3 (Dérivées de fonctions usuelles) La propriété ci-dessus permet de dériver les fonctions suivantes:

$f(x)$	$f'(x)$	D_f et $D_{f'}$
$x^r, r \in \mathbb{R}_+^*$	rx^{r-1}	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln\lvert u(x)\rvert, u(x) \neq 0$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	D_u et $D_{u'}$

I.4 Dérivées successives

Définition 6 On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est n fois dérivable ($n \in \mathbb{N}^*$), s'il existent $f_0, f_1, ..., f_n$ telles que $f_0 = f$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ f_i est dérivable sur I et $f_i' = f_{i+1}$.
On note alors $f^{(n)}$ la fonction f_n et on l'appelle la dérivée n^{me} de f sur I.
On convient que $f^{(0)} = f$. On note les premières dérivées par f', f'', f'''.

Exemple 4

1. $(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} \text{ si } n \leq m, \\ 0 \text{ si } n > m. \end{cases}$.
2. $(e^x)^{(n)} = e^x$ pour tout n.
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

Proposition 1 L'ensemble $D^n(I, \mathbb{R})$ des fonctions n fois dérivables sur I est stable par addition et multiplication des applications. Et on a pour tout f, g dans $D^n(I, \mathbb{R})$:

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

Pour la multiplication on a la formule de Leibniz suivante:

Théorème I.4 (Formule de Leibniz) Si $f, g \in D^n(I, \mathbb{R})$ alors $f \times g \in D^n(I, \mathbb{R})$ et on a:

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p f^{(p)} g^{(n-p)}.$$

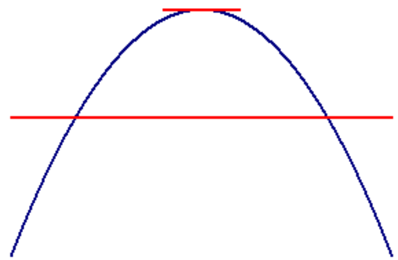
Preuve: Par récurence sur n. Elle en tout point semblable à cette la formule du binome de Newton dans un anneau. ▪

II Etude globale des fonctions dérivables

II.1 Théorème de Rolle[1]

Théorème II.1 (de Rolle) Soit $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

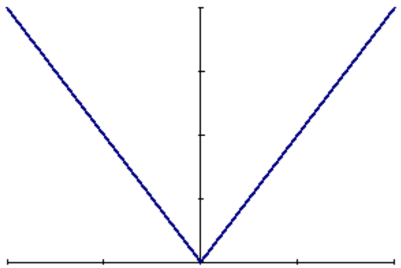
Preuve: f étant continue sur $[a, b]$ donc bornée et atteint ses bornes.
Si f est constante alors $f' = 0$ sur $]a, b[$ tout entier.



[1]Français. 1652-1719.

Si f n'est pas constante alors son maximum ou son minimum sur $[a,b]$ est différent de $f(a) = f(b)$. Donc f atteint un extrémum en un poit $c \in]a,b[$ et donc $f'c) = 0$. ∎

Remarque 7 la condition de dérivabilité sur $]a,b[$ n'est pas superflue.
Exemple: la fonction $x \longmapsto |x|$ sur $[-1,1]$.

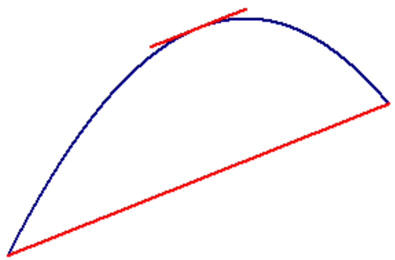


$y = |x|$. la dérivée ne s'annule pas.

II.2 Théorèmes des accroissements finis

Théorème II.2 (T.A.F) Soit $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Preuve: On applique le théorème de Rolle à $g : x \longmapsto f(x) - f(a) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



On a bien $g(a) = g(b) = f(a)$. et $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $a(x) = 1 - x^2$ $1 - x^2 = -14 + 2x$, $\dfrac{a(3)-a(-5)}{8} = -2x$, Solution is: -1 ∎

Corollaire II.3 Soit $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$, alors pour tout $x, x+h \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $f(x+h) = f(x) + h.f'(x+\theta h)$.

Théorème II.4 Soit I un intervalle et Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I , alors on a:

1. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
2. f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I.
3. f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I.

Preuve: Utilise le T.A.F. ∎

Remarque 8 Si $f' > 0$ (resp $f' < 0$) sur I sauf peut être en un nombre fini de points où elle est nulle alors f est strictement croissante (resp strictement décroissante).

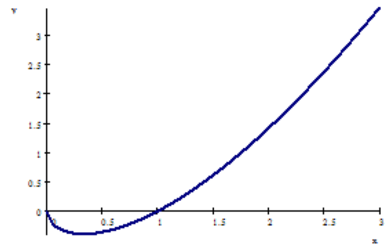
Plan d'étude d'une fonction

On étudie la fonction $f : x \longmapsto (x-1)\sqrt{x}$.

1. Domaine de définition. $D_f = \mathbb{R}_+$.
2. Continuité et limites. f est continue sur D_f et on a $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Dérivabilité et variations. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{3x-1}{\sqrt{x}}$. D'où le tableau de variations suivant:

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$\frac{-2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Branches infinies. On a $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, on examine $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Donc f admet une B.P.D.A l'axe (Oy).
5. Représentation graphique.



$f(x) = (x-1)\sqrt{x}$.

Théorème II.5 (Inégalité des Accroissements finis) Soit $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$.
Si $m \leq f' \leq M$ sur $]a,b[$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
En particulier si $|f'| \leq k$ sur $]a,b[$ alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.

Preuve: On a $f' - m \geq$ donc la fonction $f - m(x-a)$ est croissante.
De même la fonction $f - M(x-a)$. ∎

Théorème II.6 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur I dérivable sur $I \setminus \{a\}$ $(a \in I)$. Si f' admet une limite ℓ en a (resp à droite ou à gauche en a) alors f est dérivable en a (resp à droite ou à gauche en a) et on a

$$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} f'(x) = \ell.$$

Preuve: On a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$ avec $c_x \in]a, x[$. Donc quand x tend vers a, c_x aussi tend vers a et donc d'après la composition des limites on a, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f'(x)$.
▪

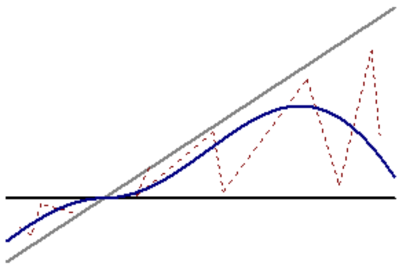
Exemple 5 (f dérivable en un point sans que f' admette de limite en ce point) Avec

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

On a $f'(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas.

Exemple 6 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On montre que $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout n et donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Interprétation géométrique de l'inégalité des A.F



$m \leq f' \leq M$. La courbe est située entre les deux droites $y = b + M(b-a)$ et $y = b + m(b-a)$.

Etude de suites récurrentes

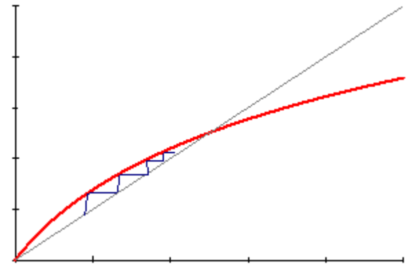
On étudie la suite

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n). \end{cases}$$

Avec $f(x) = \ln(1+2x)$ et $f'(x) = \dfrac{2}{1+2x}$, on a $|f'x)| \leq \dfrac{2}{3}, \forall x \geq 1$, donc on a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &\leq \frac{2}{3}|u_n - \ell| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 |u_{n-1} - \ell| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |u_0 - \ell| . \end{aligned}$$

Où ℓ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.



III Fonctions convexes

III.1 Définitions - Exemples

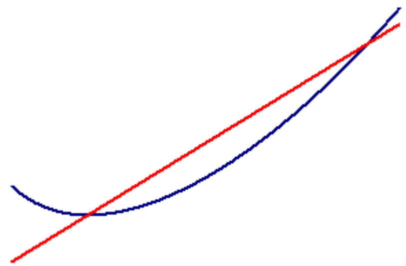
Définition 7 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I intervalle non vide et non réduit à un point). On dit que convexe sur I si $\forall(x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que concave sur I si $\forall(x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Interprétation graphique



Fonction convexe. La courbe est au dessus de la corde

Définition 8 L'épigraphe de f est la partie du plan située au dessus de la courbe.

$$\text{epi}(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$

On a alors l'équivalence: f convexe (resp concave) si et seulement si epi(f) est convexe (resp concave).

Exemple 7

1. Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.
2. Les fonctions $x \longmapsto |x|$; $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$
3. Les fonctions $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto \ln x$ sont concaves sur $\mathbb{R}$.

Propriétés

P III.1 La somme de fonctions convexes (resp concave) est convexe (resp concave).

P III.2 Si $k > 0$ (resp $k < 0$) et f convexe alors $k.f$ est convexe (resp concave).

P III.3 Si f est convexe alors $\forall(x_1, x_2, ..., x_n) \in I^n, \forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i = 1$ on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Preuve: par récurrence sur n. ▪

Remarque 9 Si f est concave alors $\forall(x_1, x_2, ..., x_n) \in I^n, \forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i = 1$ on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

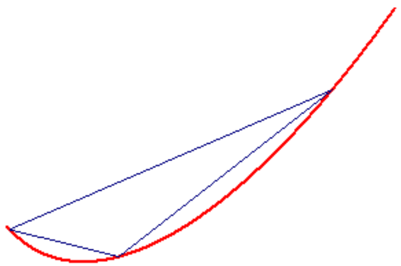
Définition 9 (Fonction strictement convexe) On dit que f est strictement convexe si $\forall(x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in]0,1[$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

III.2 Caractérisation des fonctions convexes

Théorème III.1 (Lemme des trois pentes) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. f est convexe sur I si et seulement si

$$\forall x < y < z \in I : \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$



Fonction convexe. Lemme des trois pentes.

Théorème III.2 f convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction

$$\varphi_a : \begin{array}{rcl} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

est croissante.

Preuve: On démontre l'équivalence... ▪

III.3 Convexités et dérivabilité

Théorème III.3 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I (I intervalle) alors on a

1. f convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
2. f concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Théorème III.4 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I alors on a

1. f convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$sur I.
2. f concave sur I si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I.

Définition 10 (point d'inflexion) Un point où la fonction change de concavité est dit point d'inflexion de la courbe de f.

Remarque 10 Si f est deux fois dérivable, un point d'inflexion est un point où la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe.

Exemple 8 $f(x) = x^3$. et $f(x) = x^4$.

Théorème III.5 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur I (I intervalle) alors on a

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Remarque 11 Le théorème précédent exprime le fait que le graphe d'une fonction convexe est situé au dessus de ses tangentes.

Lien avec l'optimisation

On veut résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } x_0 \in I \text{ tel que} \\ f(x_0) = \min\limits_{x \in I} f(x). \end{cases}$$

- Si f est dérivable un tel point ,s'il existe est un point critique, i.e:

$$f'(x_0) = 0$$

- Si en plus f est convexe alors tout point critique est solution du problème initial. En effet: f' étant croissante donc si elle s'annule en x_0 alors elle est ≤ 0 à gauche de x_0 et ≥ 0 à droite de x_0, donc elle présente un minimum en x_0.
- Si en plus f est strictement convexe alors le point critique ci-dessus est unique, et donc le problème initial admet une solution unique.

III.4 Inégalités de convexité

On obtient des inégalités intéressantes, dites (inégalités de convexité) de la façon suivante:

1. On se donne une fonction f.
2. On vérifie qu'elle est convexe (ou concave) sur I en calculant f''.
3. On ecrit l'inégalité de convexité (éventuellement généralisée).

Exemple 9 Avec la fonction $x \longmapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n : \frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}.$$

Exemple 10 Avec la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n : (x_1 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Inégalité de Young

$\forall u, v \in \mathbb{R}_+^*, \forall p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a:

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Inégalité de Holder

De l'inégalité de Young, on déduit l'inégalité suivante dite de Holder.

$$\forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n : \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$