Nombres complexes

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

I Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes:

I.1 Définitions

On munit $\mathbb{R}^2$ de deux l.c.i

1. Addition: $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \forall\,(x',y')\in\mathbb{R}^2$
   $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$
2. Multiplication: $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \forall\,(x',y')\in\mathbb{R}^2$
   $(x,y)\,.\,(x',y')=(xx'-yy',x'y+xy')$
   On vérifie facilement qu'on a le théorème suivant

Théorème I.1 Muni des l.c.i ci dessus $\mathbb{R}^2$ a une structure de corps, son élément neutre est $0=(0,0)$, et son élément unité et $1_{\mathbb{C}}=(1,0)$

Définition 1 Le corps ainsi obtenue est appelé corps des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

Définition 2 On note i le complexe $(0,1)$ et on a $i^2=-1_{\mathbb{C}}=-(1,0)$.

On définit Sur $\mathbb{C}$ la loi externe par : $\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall z=(x,y)\in\mathbb{C}:\lambda z=(\lambda x,\lambda y)$.
On définit le morphisme de corps:

$$\begin{array}{rcl}\varphi:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & (x,0)\end{array}$$

c.à.d φ vérifie les propriétés:

$$\begin{array}{rcl}\varphi\,(x+x') & = & (x+x',0)=(x,0)+(x',0)\\ \varphi\,(x.x') & = & (x.x',0)=(x,0)\,.\,(x',0)\end{array}$$

En plus φ est injectif. Donc $\mathbb{R}$ est un isomorphe à $\operatorname{Im}(\varphi)$ (qui est un sous corps de $\mathbb{C}$), on identifie alors $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}.1$, et on dira que $\mathbb{R}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$), on fera donc les identifications suivantes:

$$(x,0)\equiv x,\ (1,0)\equiv 1,\ i^2\equiv -1 \text{ et } (x,y)=x+iy.$$

L'écriture $z=x+y.i$ est appelée la *forme algébrique* de z, x est la partie réelle et y la partie imaginaire de z. On note $\operatorname{Re}(z)=x$ et $\operatorname{Im}(z)=y$. On a donc:

$$\forall x,y,x',y'\in\mathbb{R}:x+iy=x'+iy'\Longleftrightarrow x=x' \text{ et } y=y'$$

I.2 Conjugaison dans $\mathbb{C}$

On appelle conjugué de $z=x+y.i$, le complexe noté $\bar{z}=x-y.i$. L'application

$$\begin{array}{rcl}s:\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & \bar{z}\end{array}$$

vérifie $s\circ s=Id_{\mathbb{C}}$.

Interprétation géométrique:

- Du fait de la bijective entre $\mathbb{R}^2$ et les plans (affine et vectoriel),

on a donc les mêmes bijections avec $\mathbb{C}$.
- Le complexe $z=x+i.y$ peut représenter le vecteur de plan de cordonnee (x,y) dans une base donnée
On dit que $\vec{v}$(ou M) est l'affixe de z, le conjugé correspand alors à la symétrie axiale par rapport a $(O,\vec{x})$

Propriétés

On vérifie sans peine ces propriétés

1. L'application s est un morphisme de corps: $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$ et $\overline{zz'}=\bar{z}.\bar{z'}$
2. $\forall z\in\mathbb{C}:\overline{(\bar{z})}=z.$

Remarque 1 En particulier si $\lambda\in\mathbb{R}$ et $z\in\mathbb{C}$, $\overline{\lambda.z}=\lambda.\bar{z}$

I.3 Module d'un complexe

Définition 3 On appelle module d'un nombre complexe $z=x+i.y$ le réel positif ou nul

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Remarque 2 Si $\overrightarrow{v}$ est le vecteur d'affixe z , alors $\|\overrightarrow{v}\|=|z|$

Remarque 3 Si M et M'sont les points d'afiixes respectives z et z',
alors $|z-z'|=\|\overrightarrow{MM'}\|$

Propriétés

1. $|z|=0$ si et seulement si $z=0$.
2. $\forall\lambda\in\mathbb{R}^+$ et $\forall z\in\mathbb{C}$ on a $|\lambda z|=\lambda.\,|z|$. En général:
   $$\forall z,z'\in\mathbb{C}:|zz'|=|z|\,|z'|\,.$$
3. $|z+z'|\leq|z|+|z'|$.
   On a aussi les propriétés suivantes:
4. $\forall z\in\mathbb{C}:|\operatorname{Re}(z)|\leq|z|$ et $|\operatorname{Im}(z)|\leq|z|$
5. $||z|-|z'||\leq|z-z'|$.
6. $z\bar{z}=|z|^2$ et on a $\frac{1}{Z}=\frac{\overline{Z}}{|Z|^2}$

I.4 Racines carées d'un complexes

Du fait que $i^2 = -1$, alors -1 admet deux racines carées dans $\mathbb{C}$, i et $-i$.

Théorème I.2 soit $a \in \mathbb{C}^*$, il existe exactement deux complexes solutions de l'équation $z^2 = a$ (qui sont opposés), si $a \in \mathbb{R}_-^*$ ces deux racines (complexes) sont conjugués.

équation algébrique de deuxième degré dans $\mathbb{C}$:

Pour résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On pose

$$\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}, \text{ et } \sqrt{\Delta} \text{ désigne la racine de } \Delta \text{ dans } \mathbb{C}$$

Les racines sont les deux complexes:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$, s'appele le discriminant de l'équation.

Remarque 4 Dans $\mathbb{C}$ on a un résultat plus fort : "toute fonction polynomial de degré ≥ 1, possède au moins une racine", on dit alors que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos.

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

le complexe j vérifie $j^2 = \overline{j}$ $j^3 = 1$ $j2 + j + 1 = 2$

II Nombre complexe de module 1:

II.1 Le groupe des complexes de module 1

Théorème II.1 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

Proposition 1 Tout complexe $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit de manière unique comme produit d'un réel > 0 $(|z|)$ et d'un complexe de module 1 $\left(\frac{Z}{|Z|}\right)$.

II.2 Argument d'un complexe:

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle argument de z, tout réel θ vérifiant

$$z = |z| . (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \tag{1}$$

càd si θ et θ' verifient (1) alors $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$, l'unique $\theta \in]-\pi, \pi[$ vérifiant (1) est dit l'argument principale de z.

Exemple 2 $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$ $\arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$ $\arg(i) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

On pose pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$$

Les formules trigonometriques:

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \theta') &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \\ \sin(\theta + \theta') &= \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta') \end{aligned}$$

La notation $e^{i\theta}$ donne $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$, une notation qui prolonge la définition de l'exponentiel, et on note $1 = e^{i0}$, $-1 = e^{i\pi}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. et en génerale on a:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

connue sous le nom de formules d'EULER

Remarque 5 si $z = e^{i\theta}$ alors $\overline{z} = e^{-i\theta}$

En génerale $z = |z| . e^{i\theta}$ ou θ est un argument de z

Proposition 2 Deux complexes $z = re^{i\theta}$et $z' = r'e^{i\theta'}$ sont égaux ssi $\left\{ \begin{array}{c} r = r' \\ \theta \equiv \theta' [2\pi] \end{array} \right\}$

Concéquences

1. Formule de MOIVRE:
   $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = (\cos(n.\theta) + i \sin(n.\theta))$
   En particulier cette formule donne $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
2. Linéarisation
   C'est l'opération inverse de la précédente.
   Il s'agit d'écrire $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)$,...$\cos(n\theta)$ et $\sin(\theta)$, $\sin(2\theta)$, ... $\sin(n\theta)$

Exemple 3 pour $n = 2$ et $n = 3$.

Remarque 6 On peut aussi les expressions $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ et le binôme de

Remarque 7 NEWTON et on aura:

$$\begin{aligned} \cos^n(\theta) &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, e^{i(2p-n)\theta} \\ \sin^n(\theta) &= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, (-1)^{n-p} \, e^{i(2p-n)\theta} \end{aligned}$$

Exercice 1 Montrer que:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \cos \frac{n\theta}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = \sin \frac{n\theta}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

II.3 Racines n^{ieme} d'un complexe

Théorème II.2 Soit n un entier naturel ≥ 2, et soit $a \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble

$$\mathcal{R}_n(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = a\}$$

est de cardinal n, et pour $\theta \in \arg(a)$, on a

$$\mathcal{R}_n(a) = \left\{ |a|^{\frac{1}{n}} . e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

Théorème II.3 (et définition) Pour $n \geq 2$, $\mathcal{R}_n(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ est un sous groupe de $\mathbb{U}$,appelé goupe des racines n^{ieme} de l'unité, noté $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

II.4 Exponentiel Complexe:

Définition 4 Pour tout $z = x + iy$, on pose $\exp(z) = e^x e^{iy}$ (ou e^z).

Théorème II.4 L'application exponentiel

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (\mathbb{C}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \times) \\ z & \longmapsto & \exp(z) \end{array}$$

est un morphisme surjectif de groupes, i.e:

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} : e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

dont le noyeau est: $2i\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$, i.e:

$$\exp(z) = 1 \Longleftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Remarque 8 Si $z = a + ib$ alors $|e^z| = e^a$ et $\arg(e^z) = b + 2k\pi$ et $(k \in \mathbb{Z})$.

Conséquence: L'équation $e^z = a$, $a \in \mathbb{C}^*$

Si $a = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, alors on a:

$$\begin{array}{l} e^z = a \\ z = x + iy \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = \ln|a| \\ y \in \arg(a) \end{array}$$

III Nombres Complexes et Géométrie:

III.1 Affixe d'un point

Le plan euclidien étant muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. L'application:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M(x,y) & \longmapsto & x + iy \end{array}$$

est bijective. Le complexe z est appelé l'affixe du point M, on écrit $M(z)$.

Remarque 9 Si M est un point d'affixe z alors

- $|z| = OM$.
- Si $A(a)$ alors $|z - a| = AM$.
- Le cercle de centre $A(a)$ et de rayon r est l'ensemble $\{M(z) \mid |z - a| = r\}$.
- Le disque fermé de centre $A(a)$ et de rayon r est l'ensemble $\{M(z) \mid |z - a| \leq r\}$.

III.2 Quelques transformations affines

Définition 5 On appelle similitude directe (respectivement indirecte),toute application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az + b \text{ (resp } z \longmapsto a\bar{z} + b) \end{array}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

En particulier on a les applications suivantes sont des similitudes:

Symétrie axiale: $z \longmapsto \bar{z}$

Translation: $z \longmapsto z + b$, avec $b \in \mathbb{C}$.

Homothétie: $z \longmapsto az + b$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$.

Définition 6 Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, a \neq 1$ une similitude directe. On appelle

- Centre de la similitude l'unique point invariant ω tq $\omega = a\omega + b$.
- Rapport de la similitude le réel $k = |a|$.
- Angle de la similitude l'angle $\arg(a)$.

III.3 Droites et cerles

- Equation de droite: $\bar{u}z + u\bar{z} + w = 0$ avec $u, w \in \mathbb{C}$.
- Equation de cercle: $z\bar{z} - \bar{u}z - u\bar{z} + \gamma = 0$ avec $|u|^2 - \gamma \geq 0$, $u \in \mathbb{C}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Propriétés

Soit $A(a)$ $B(b)$ $Z(z)$ trois points du plan alors on a:

1. $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = \dfrac{|z-a|}{|z-b|} = \dfrac{AZ}{BZ}$ est le rapport des longueurs des côtés du triangle issus de Z.
   En particulier, on a: $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = 1$ si et ssi AZB est isocèle en Z.
2. $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \widehat{BZA}$. En particulier:
   (a) Les points A, B et Z sont alignés si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$.
   (b) Les droites (AZ) et (BZ) sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 2 Soient $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ des points du plan. Montrer que $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{vmatrix} = 0.$$