

1 Rappels sur les probabilités et conditionnement

1. Rappels sur l'équiprobabilité

● Le résultat d'une expérience aléatoire est une issue ou une éventualité. L'ensemble de ces issues est E .

● Un événement est une partie de E .

● Les événements A et B sont disjoints ou incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

● Les événements A et B sont contraires si $A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cup B = E$. On note $\bar{B} = E \setminus B$.

● L'univers E est probabilisé si à chaque événement élémentaire $\{x\}$ on associe un nombre $p_i \in [0; 1]$ par une application p qui satisfait à $p(E) = 1$ et $\sum p_i = 1$.

Conséquences :

si $A \subset E$, la probabilité de A notée $p(A)$ est telle que $p(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$.

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ donc $p(\emptyset) = 0$.

Si $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cup B) = p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$.

Si $A \subset E$ et $B \subset E$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

● Univers équiprobable : ensemble E dont tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Si l'ensemble E contient N éléments, alors :

$$p_1 = p_2 = \dots = p_N = \frac{1}{N}.$$

Si $A \subset E$ et si A contient n éventualités, alors :

$$p(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

2. Probabilités conditionnelles

Soit une expérience aléatoire et deux événements A et B de l'univers probabilisé par cette expérience.

Si $p(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé s'écrit $p_B(A)$ ou $p(A/B)$ et est telle que $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Remarque : comme $A \cap B = B \cap A$, alors

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A) \quad (p(A) \neq 0 \text{ et } p(B) \neq 0).$$

$$p_B(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

3. Formule des probabilités totales

$\{B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_n\}$ est une partition de E si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, B_i \neq \emptyset \\ \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset \\ B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_i \cup \dots \cup B_n = E. \end{array} \right.$$

Si $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de E et si $p(B_i)$ est non nul pour tout i , alors :

$$p(A) = p_{B_1}(A) \times p(B_1) + p_{B_2}(A) \times p(B_2) + \dots + p_{B_n}(A) \times p(B_n)$$

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n).$$

Exemple d'application

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que la carte soit un carreau sachant que c'est une carte rouge qui a été tirée.

Corrigé commenté

Soit A l'événement « tirer une carte rouge » : $p(A) = \frac{1}{2}$.

Soit B l'événement « tirer un carreau ».

$$A \cap B = B \text{ car } B \subset A \text{ d'où } P(A \cap B) = P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Donc } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ soit } P_A(B) = \frac{1}{2}.$$

Sachant que la carte tirée est rouge, il y a une chance sur deux que ce soit un carreau.

2 Indépendance et modélisation

1. Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Conséquence : $p_A(B) = p(B)$ et $p_B(A) = p(A)$.

2. Modélisation

Définitions : Une loi de probabilité, ou distribution de probabilité, est une fonction P qui à tout événement A associe un nombre $p(A)$, sa probabilité appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.

Modéliser une expérience aléatoire c'est lui associer une loi de probabilité.

3. Liens entre statistiques et probabilités

- Une fréquence calculée à partir de données expérimentales est empirique, mais la probabilité d'un événement est un nombre théorique.

Les distributions de fréquences issues de la répétition d'expériences identiques ou indépendantes fluctuent, alors que la loi de probabilité est un invariant associé à l'expérience.

- Si on choisit n éléments indépendamment les uns des autres selon une loi de probabilité P , alors la distribution des fréquences est voisine de P pour n grand.

- Si des expériences sont répétées de façons identiques et indépendantes et si p est la probabilité associée à un événement A , alors la probabilité d'obtenir n fois l'événement A est égale à p^n .

- On appelle variable aléatoire X l'application d'un ensemble E muni d'une loi P et à valeurs dans \mathbb{R} .

La variable aléatoire X prend les valeurs x_i ($i \in \mathbb{N}$), avec les probabilités p_i définies par $p_i = P(X = x_i)$.

Distribution de fréquences sur $E = \{x_1, \dots, x_n\}$	Loi de probabilité sur $E = \{x_1, \dots, x_n\}$
(f_1, \dots, f_n) $f_i \geq 0, \quad \sum f_i = 1$ $A \subset E$, fréquence de A , $f(A) = \sum_{x_i \in A} f_i.$	(p_1, \dots, p_n) $p_i \geq 0, \quad \sum p_i = 1$ $A \subset E$, probabilité de A , $P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i.$

Cas numérique :

Moyenne empirique : $\bar{x} = \sum f_i x_i$.

Variance empirique :

$$S^2 = \sum f_i (x_i - \bar{x})^2.$$

Écart type empirique :

$$s = \sqrt{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}.$$

Cas numérique :

Espérance d'une loi P : $\mu = \sum p_i x_i$.

Variance d'une loi P :

$$\sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2.$$

Écart type d'une loi P :

$$\sigma = \sqrt{\sum p_i (x_i - \mu)^2}.$$

Exemple d'application

On lance 4 fois de suite un dé équilibré.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le 5 à chaque lancer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le 5 avec 4 lancers ?

Corrigé commenté

1. Soit A l'événement obtenir le 5 à 1 lancer.

$$p(A) = \frac{1}{6}.$$

Soit B l'événement obtenir le 5 à chaque lancer.

On répète 4 fois l'expérience aléatoire de façons identiques et indépendamment les unes des autres.

Donc $p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^4$ d'où $p(B) = \frac{1}{1296}$

2. Soit C l'événement obtenir au moins une fois le 5 après 4 lancers.

Le plus simple est de calculer la probabilité de l'événement \bar{C} qui consiste à obtenir zéro fois le nombre 5 après 4 lancers.

$$p(\bar{C}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \text{d'où} \quad p(C) = 1 - p(\bar{C}),$$

soit $p(C) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$ soit $p(C) = \frac{671}{1296}$

3 Combinatoire et lois discrètes

1. Combinatoire

- On appelle factorielle n le nombre qui s'écrit $n!$ et qui est égal à : $n(n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ pour $n \geq 2$, avec $0! = 1$ et $1! = 1$.
- Toute partie de E est une combinaison de E .

Le nombre de combinaison de p éléments parmi n est noté $\binom{n}{p}$ et est égal à $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ où $0 \leq p \leq n$.

- Cas particuliers

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

- Propriétés

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}; \quad \text{relation de Pascal : } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

- Formule du binôme de Newton

Pour tout n de \mathbb{N} , pour tout nombre a et b :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

Remarque : Si $a = b = 1$, alors $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$ ceci traduit le nombre de parties d'un ensemble ayant n éléments.

2. Lois discrètes

- Loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli a seulement deux issues contraires A et \bar{A} de probabilités respectives p et $q = 1-p$.

Le schéma de Bernoulli est la répétition n fois et de façons identiques et indépendantes d'une épreuve de Bernoulli.

La probabilité d'obtenir k réalisations de A sur n épreuves est donnée par la

loi de Bernoulli : $k \mapsto p_k$ avec $p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Remarque : $\sum_{p=0}^n p^k q^{n-k} = 1$.

• Loi binomiale

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre k de réalisations de A dans un schéma de Bernoulli.

La variable X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) , elle a pour loi de probabilité $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Dans ce cas $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$.

Exemple d'application

Démontrer les formules : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \text{où } 0 \leq p \leq n.$$

Corrigé commenté

$$A = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$$

$$A = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} = \frac{(n-1)!p}{(p-1)!p(n-p)!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p-1)!(n-p)!}$$

Le dénominateur commun est $p!(n-p)!$

car $(p-1)!p = p!$ et $(n-p-1)!(n-p) = (n-p)!$

$$\text{d'où } A = \frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p};$$

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}, \quad \text{d'où } \boxed{\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}}$$

4 Lois continues

1. Définitions

• On appelle densité de probabilité f sur un intervalle I une fonction satisfaisant aux conditions suivantes : f est continue sur I , f est positive sur I et

$$\int_I f(x) dx = 1.$$

• Étant donnée une densité de probabilité, la loi de probabilité correspondante continue associe à tout intervalle l'intégrale de la densité sur cet intervalle.

• Soit X une variable aléatoire définie dans un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R} et f une densité de probabilité.

La variable X est une variable aléatoire de densité f si quels que soient a et

$$b \text{ de } I \text{ on a } P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Les événements sont des réunions finis d'intervalles.

Remarques : $P(X = a) = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$; $P(X \geq b) = 1 - P(X \leq b)$.

En pratique la donnée de f suffit pour étudier les propriétés de X , en particulier f joue le rôle de loi pour X .

L'espérance de X est donnée par $E(X) = \int_a^b t f(t) dt$ et la variance de X est telle que $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

2. Lois continues à densité

• **Lois uniformes sur $[a ; b]$**

On appelle loi uniforme sur un intervalle $[a ; b]$, la loi continue de probabilité dont la densité f est telle que $f(x) = \frac{1}{b-a}$ pour tout x de $[a ; b]$.

Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle $[c ; d]$ inclus dans $[a ; b]$ est

$$\text{égale à } P(c \leq X \leq d) \text{ telle que } P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{dx}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}.$$

Cas particulier : la loi uniforme sur $[0 ; 1]$ a une densité f telle que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) = 1$.

Dans ce cas la probabilité d'un intervalle connu dans $[0 ; 1]$ est la longueur de cet intervalle.

• **Lois exponentielles (lois de durée de vie sans vieillissement)**

On appelle loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$), une loi de densité f telle que $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

$$\text{Pour cette loi, } P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt,$$

donc $P(a \leq X \leq b) = [-e^{-\lambda t}]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

3. Adéquation à une loi équirépartie

Il s'agit de comparer les fréquences obtenues pour une expérience aléatoire sur un échantillon, avec un modèle d'équiprobabilité.

Pour cela on considère la distance d entre la distribution des fréquences $(f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)$ avec les probabilités théoriques $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$ si on répète l'épreuve n fois.

$$d^2 = (f_1 - p_1)^2 + \dots + (f_i - p_i)^2 + \dots + (f_n - p_n)^2.$$

Le nombre d^2 doit être « petit » pour qu'il y ait compatibilité entre les données empiriques et celles théoriques.

Plus le nombre de tirages est grand, plus la distribution des fréquences est adéquate avec la loi de probabilité et plus d^2 sera faible.

Si $d^2 \leq \frac{2}{n}$, alors il y a adéquation à une loi équirépartie.

Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < -1 \\ f(x) = x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) = -x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Représenter graphiquement f et montrer que f détermine une loi de probabilité P , puis calculer $P\left(\left[-1; -\frac{1}{2}\right]\right)$.

Corrigé commenté

La fonction f est définie, positive et continue sur \mathbb{R} .

Sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $f(x) = 0$

et $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$ car f est paire donc,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \left[\frac{-x^2}{2} + x \right]_0^1 = 2 \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = 1.$$

f détermine donc une loi de probabilité P et :

$$P\left(\left[-1; -\frac{1}{2}\right]\right) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{8}.$$

