

1 Introduction à la fonction exponentielle

1. Équation différentielle

● On appelle **équation différentielle** une égalité dans laquelle figurent une fonction et ses dérivées successives. Les solutions d'une telle équation sont des fonctions.

● Théorème

Il existe une unique fonction non nulle, dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, qui soit solution de l'équation différentielle $f' = kf$. Cette fonction est la fonction exponentielle notée \exp .

● **Conséquences** : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \exp'x = \exp x$
 $\exp 0 = 1$

On note : $\exp x = e^x$.

2. Propriétés

● Propriété fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) \quad f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

soit $\exp(x+y) = (\exp x) \times (\exp y)$

ou bien $e^{x+y} = e^x \times e^y$.

● Quels que soient les réels x et y :

$$\exp x > 0 \Leftrightarrow e^x > 0$$

$$\frac{\exp x}{\exp y} = \exp(x-y) \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$\frac{1}{\exp y} = \exp(-y) \Leftrightarrow e^{-y} = \frac{1}{e^y}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad (\exp x)^n = \exp(nx) \Leftrightarrow (e^x)^n = e^{nx}.$$

3. Conséquences

La fonction exponentielle base e , dont la dérivée est elle-même, est strictement croissante sur \mathbb{R} . Elle est continue et bijective.

$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}), \quad \exp x = \exp y \Leftrightarrow x = y$ (bijection)

$\exp x < \exp y \Leftrightarrow x < y$ (stricte croissance).

Exemples d'application

1 En utilisant la définition de la fonction exponentielle et la propriété caractéristique, démontrer que pour tout réel x : $\exp x > 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.

Corrigé commenté

• Pour montrer que $\exp x > 0$, il est nécessaire de prouver qu'il n'existe pas de réel x_0 tel que $\exp x_0 = 0$.

Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $\exp x_0 = 0$, alors pour tout réel x :
 $\exp x = \exp(x_0 + (x - x_0)) = \exp x_0 \times \exp(x - x_0) = 0$ donc la fonction « exp » serait la fonction nulle, ce qui contredit la définition.

Par ailleurs ($\forall x \in \mathbb{R}$) $\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right)$.

Soit $\exp(x) = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2$ d'où $\exp x > 0$.

• $\exp 0 = 1 \Leftrightarrow \exp(x + (-x)) = 1 \Leftrightarrow \exp x \times \exp(-x) = 1$
 soit :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \quad \text{car } \exp x \neq 0.$$

2 Simplifier les écritures des nombres a et b suivants :

$$a = \frac{\exp(-3) \times (\exp(3))}{(\exp 1)^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\exp(-x) \times (\exp x)^2}{\exp x}$$

Corrigé commenté

Il est souvent plus facile d'utiliser la notation e^x pour $\exp x$.

$$a = \frac{e^{-3} \times e^3}{(e^1)^2} = \frac{e^0}{e^2} = \frac{1}{e^2} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{1}{e^2}.$$

$$b = \frac{e^{-x} \times (e^x)^2}{e^x} = e^{-x} \times e^{2x} \times e^{-x} = e^0 \quad \text{d'où} \quad b = 1.$$

2 Étude de la fonction exponentielle base e

1. Étude et représentation graphique

● La fonction exponentielle base e est continue et bijective et elle admet la fonction logarithme népérien pour fonction réciproque.

● $x \in \mathbb{R}$ et $\exp x = y \Leftrightarrow x = \ln y$ avec $y \in \mathbb{R}_+^*$

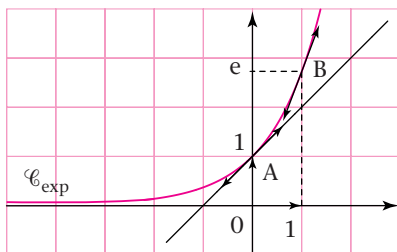
d'où $\ln(\exp x) = x$ et $\exp(\ln x) = x$.

● $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$

donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction « exp ».

● $e \approx 2,718$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	+	+
\exp	0	1	e	$+\infty$



Remarques

La tangente en A à \mathcal{C}_{\exp} a pour équation $y = x + 1$ et la tangente en B a pour équation $y = ex$.

Les courbes représentant \mathcal{C}_{\ln} et \mathcal{C}_{\exp} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. Limites remarquables et croissances comparées

● $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\exp x \approx 1 + x$ dans un voisinage de zéro.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = 0$; avec $\alpha > 0$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0$; avec $\alpha > 0$.

● $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$; avec $\alpha > 0$.

● Si $\alpha > 0$ et $a > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.

Exemples d'application

1 Soit f et g deux fonctions telles que :

$$f(x) = e^{\ln|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{|\ln x|}.$$

1. Indiquer les ensembles de définition de f et g .
2. Suivant les valeurs de x , donner une écriture de $f(x)$ et $g(x)$ sans barre de valeur absolue.

Corrigé commenté

1. La fonction « \ln » est définie sur \mathbb{R}_+^* , or $|x| \geq 0$ et $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$, donc $D_f = \mathbb{R}^*$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$.

2. Si $x > 0$, alors $|x| = x$, donc $f(x) = e^{\ln x} = x$.

Si $x < 0$, alors $|x| = -x$, donc $f(x) = e^{\ln(-x)} = -x$.

Rappel : la fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

• $|\ln x| = \ln x \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

$|\ln x| = -\ln x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$, donc :

$$\text{si } x \geq 1, \quad g(x) = e^{\ln x} = x;$$

$$\text{si } 0 < x \leq 1, \quad g(x) = e^{(-\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

2 Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

Corrigé commenté

Pour tout x de $]0; +\infty[$, $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ donc $f(x)$ existe bien.

• $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$, or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$,

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

3 Autres fonctions

1. Dérivées et primitives

- Soit une fonction u , définie et dérivable sur un intervalle I .

$$(\exp \circ u)' = u' \times (\exp \circ u).$$

- Les primitives des fonctions $u' \exp(u)$ sont les fonctions $(\exp \circ u) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. Fonctions exponentielles base a

- Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction logarithme de base « a » est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} qui admet pour réciproque la fonction exponentielle de base a notée $x \mapsto a^x$.

Rappel : $\ln_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ avec $a \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

• Propriétés

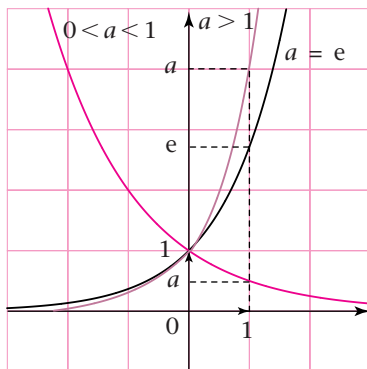
- $a^0 = 1$; $a^1 = a$; $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) \quad a^{x+y} = a^x \times a^y$.
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$; $a^{nx} = (a^x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
- Pour $x > 0$ et $a > 0$, $a^x = e^{x \ln a}$.

$a > 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x \mapsto a^x$	$0 \longleftarrow 1 \longleftarrow a \longrightarrow +\infty$			

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x \mapsto a^x$	$+\infty \longleftarrow 1 \longleftarrow a \longrightarrow 0$			



3. Fonctions puissances

- Pour $x > 0$ et pour tout réel α , on appelle **fonctions puissances** les fonctions $x \mapsto x^\alpha$.

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Remarque : on définit la fonction racine $n^{\text{ième}}$, noté $\sqrt[n]{}$, comme la réciproque sur \mathbb{R}^+ de $x \mapsto x^n$ avec $n \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$. On note aussi $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

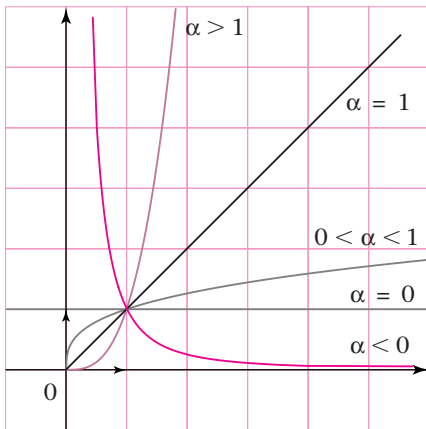
● Propriétés

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x > 0$ et $y > 0$:

$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$; $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

$\alpha < 0$		
x	0	$+\infty$
$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$		-
$x \mapsto x^\alpha$	$+\infty$	$\rightarrow 0$

$\alpha > 0$		
x	0	$+\infty$
$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$		+
$x \mapsto x^\alpha$	0	$\rightarrow +\infty$



Exemple d'application

Simplifier les nombres suivants : $\frac{e^3 \sqrt[4]{e}}{\sqrt[3]{e^2}}$; $(\sqrt[5]{e})^{\frac{5}{3}}$.

Corrigé commenté

Indication : on utilise les propriétés des racines nièmes.

• $\frac{e^3 \sqrt[4]{e}}{\sqrt[3]{e^2}} = \frac{e^3 e^{\frac{1}{4}}}{(e^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{e^{3+\frac{1}{4}}}{e^{\frac{2}{3}}} = e^{\frac{13}{4} - \frac{2}{3}} = e^{\frac{31}{12}} = 12\sqrt[12]{e^{31}}$.

• $(\sqrt[5]{e})^{\frac{5}{3}} = (e^{\frac{1}{5}})^{\frac{5}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$.

4 Équations différentielles du premier ordre

1. Équations différentielles du premier ordre sans second membre

Ce sont les équations différentielles dont le second membre est nul et qui lient une fonction et sa dérivée première.

Ces équations sont de type $y' - ay = 0 \Leftrightarrow y' = ay$.

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Remarque : il existe une unique solution s'il y a une condition initiale $y_0 = f(x_0)$. Cette condition permet de déterminer la constante C .

2. Équations différentielles du premier ordre avec second membre

Ce sont des équations différentielles dont le second membre est une fonction quelconque.

Pour résoudre une telle équation, on cherche une solution particulière de même forme que le second membre, puis on la résout en suivant toutes les indications du texte.

Exemple d'application

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2x^3 - 4x + 7$.

- Déterminer un polynôme P du troisième degré solution de (E).
- Soit (E') l'équation différentielle sans second membre telle que $y' + 2y = 0$. Résoudre l'équation (E').
- Démontrer qu'une fonction g est solution de (E) si, et seulement si, $g - P$ est solution de (E').
Écrire les solutions g de (E).
- Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = -\frac{1}{4}$.

Corrigé commenté

- Soit P le polynôme défini sur \mathbb{R} par :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ avec } a \neq 0.$$

P est solution de (E) si, et seulement si, $P' + 2P = 2x^3 - 4x + 7$.

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

P est solution de (E) si, et seulement si, quel que soit x de \mathbb{R} :

$$2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + c + 2d = 2x^3 - 4x + 7.$$

Par identification des deux polynômes, quel que soit x de \mathbb{R} :

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + 2b = 0 \\ 2b + 2c = -4 \\ c + 2d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{15}{4} \end{cases}$$

d'où :

$$P(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}.$$

2. (E') : $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$.

Les solutions de (E') sont les fonctions :

$$x \mapsto Ce^{-2x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

3. • La fonction $(g - P)$ est solution de (E') si, et seulement si, $(g - P)' + 2(g - P) = 0$ soit $g' + 2g - (P' + 2P) = 0$;

$$\text{soit } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (g' + 2g)(x) - \left(3x^2 - 3x - \frac{1}{2} + 2x^3 - 3x^2 - x + \frac{15}{2}\right) = 0 ;$$

soit $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (g' + 2g)(x) = 2x^3 - 4x + 7$ ce qui signifie que g est solution de l'équation (E).

• La fonction $g - P$ est solution de (E') signifie que $g(x) - P(x) = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ soit :

$$g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4} + Ce^{-2x}.$$

4. Soit f la fonction g particulière telle que

$$f(0) = -\frac{1}{4} \quad \text{d'où} \quad \frac{15}{4} + Ce^0 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow C = -4.$$

Par suite :

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4} - 4e^{-2x}.$$