

1 Limite d'une suite

1. Limite d'une suite

● **Rappel** : toute application de A dans \mathbb{R} où A est une partie de \mathbb{N} , est une **suite numérique**.

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cette application.

• Une suite u a une limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Si la suite u a une limite L finie, on dit que la suite u est **convergente**.

On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ ou bien $\lim(u_n) = L$.

Remarque : toute suite non convergente est **divergente**.

• Une suite u a une limite égale à $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si tout intervalle $[B ; +\infty[$ (resp. $]-\infty ; C]$) avec B et C deux réels quelconques, contient tous les u_n à partir d'un certain rang.

2. Limite de suites particulières

• Les suites usuelles $n \mapsto \frac{1}{n^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $n \mapsto \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ sont convergentes de limite zéro.

• Toute suite stationnaire $n \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$) est convergente de limite a .

Soit une suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ avec f définie sur un intervalle $[b ; +\infty[$.

Si la limite de f est L , alors la limite de u est L .

3. Théorèmes de comparaison

• Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes telles que, à partir d'un certain n_0 , pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

Si $|u_n| \leq v_n$ et $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = 0$.

● **Théorème des gendarmes**

Soit trois suites (u_n) , (v_n) , (w_n) , telles que u et w convergent vers L .

S'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $\lim v_n = L$.

Exemples d'application

❶ Soit la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n+3}{n+2}$.

Pour un entier naturel p donné, déterminer un entier naturel n tel que :

$$1 - 10^{-p} < u_n < 1 + 10^{-p}.$$

En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Corrigé commenté

Comme $n+3 > n+2$, alors $u_n > 1$ donc pour tout n de \mathbb{N} , $1 - 10^{-p} < u_n$.

Déterminons n tel que $u_n < 1 + 10^{-p}$

$$\text{soit } \frac{n+3}{n+2} < 1 + 10^{-p} \text{ soit } \frac{n+3}{n+2} - 1 < 10^{-p} \text{ soit } \frac{1}{n+2} < 10^{-p}$$

c'est-à-dire $10^p < n+2$ car $n+2 > 0$ d'où $n > 10^p - 2$.

Donc si on pose $N = 10^{p+1} - 2$, tous les termes de la suite à partir de u_n sont dans l'intervalle ouvert $]1 - 10^{-p}; 1 + 10^{-p}[$.

Indication : quel que soit l'entier p choisi, donc quel que soit l'intervalle ouvert de centre 1, cet intervalle contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

La suite (u_n) est donc convergente et sa limite est 1.

❷ Soit la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n^2+3}{n+1}$.

Déterminer par deux méthodes différentes la limite de (u_n) .

Corrigé commenté

• Comme $u_n = \frac{n^2+3}{n+1}$, alors $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{x\left(x+\frac{3}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}}$

car $x \neq 0$ dans un voisinage de $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} + x \right) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 \end{array} \right\} \text{ donc, par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La suite u étant la restriction de f à \mathbb{N} , (u_n) est divergente.

$$\bullet u_n = \frac{n^2-1+4}{n+1} = n-1 + \frac{4}{n+1}.$$

Or, sur \mathbb{N} , $n+1 > 0$ donc $\frac{4}{n+1} > 0$ et par suite $n-1 + \frac{4}{n+1} > n-1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty \text{ donc par comparaison } \lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty.$$

2 Monotonie et propriétés des suites

1. Monotonie d'une suite

Soit une suite réelle (u_n) et A l'intersection d'un intervalle de \mathbb{R} et de \mathbb{N} .

- La suite (u_n) est **croissante** sur A , si quel que soit n de A : $u_n \leq u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est **décroissante** sur A , si quel que soit n de A : $u_n \geq u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est **monotone** sur A , si quel que soit n de A , elle est croissante ou décroissante.
- La suite (u_n) est **stationnaire**, s'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

2. Suites majorées, minorées, bornées

Suite majorée	Suite minorée	Suite bornée
Soit $A \subset \mathbb{N}$, pour tout n de A , il existe un réel M ou un réel m		
$u_n \leq M$	$u_n \geq m$	$m \leq u_n \leq M$

Théorème : toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

3. Suites adjacentes

• Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_n)_{n \in A} \text{ est croissante ;} \\ (v_n)_{n \in A} \text{ est décroissante ;} \\ \text{pour tout } n \text{ de } A, u_n \leq v_n ; \\ \lim(u_n - v_n) = 0. \end{array} \right.$$

• Théorème

Deux suites adjacentes sont convergentes vers une même limite.

Exemples d'application

- 1 Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n^2+3}{n+1}$. Étudier sa monotonie sur \mathbb{N} .

Corrigé commenté

Il existe une fonction f définie sur \mathbb{R}_+ telle que $u_n = f(n)$ avec :

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}.$$

Cette fonction f est rationnelle, définie et dérivable sur \mathbb{R}_+ ,

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

$f'(x)$ a le même signe que $(x-1)(x+3)$ lequel est positif pour :

$$x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[.$$

Donc, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [1; +\infty[$,

par suite la fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$, sa restriction à \mathbb{N}^* est croissante.

Conclusion : la suite (u_n) est croissante pour tout entier naturel non nul.

Remarque : $u_0 = 3, u_1 = 2, u_2 = \frac{7}{3}, \dots$

$u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2, \dots, u_n < u_{n+1}$ donc u_0 a un comportement à part dans la suite. La monotonie d'une suite est donnée par le comportement de la majorité des éléments de (u_n) .

- 2 Soit la suite u définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n(n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.

Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Corrigé commenté

Indication : les u_n sont strictement positifs et se présentent sous la forme d'un quotient donc on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! \times n^n}{(n+1)^{n+1} \times n!}; \text{ or } (n+1)! = (n+1)n! \quad (n+1)^{n+1} = (n+1)^n(n+1)$$

$$\text{donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n \times (n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Or, $n < n+1$ soit $\frac{n}{n+1} < 1$ d'où $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$ car la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout entier naturel non nul, ce qui signifie que la suite (u_n) est strictement décroissante sur \mathbb{N}^* .

3 Récurrence

1. Raisonnement par récurrence

Soit un nombre entier naturel n_0 et P_n une propriété.

Démontrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$ se fait en trois étapes.

- **Initialisation** : on vérifie que P_{n_0} est vraie.
- **Hérédité** : on suppose pour un entier $n \geq n_0$, que la propriété P_n est vraie (hypothèse de récurrence), puis on démontre, compte tenu de cette hypothèse, que P_{n+1} est vraie.
- **Conclusion** : pour tout $n \geq n_0$, la propriété P_n est vraie.

Remarque : on pense à ce raisonnement par récurrence, dès que l'on veut montrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$,

2. Suites récurrentes

Soit une fonction f définie sur un intervalle I tel que pour tout x de I , $f(x)$ est aussi dans I .

On peut définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 avec $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si u_n converge, alors sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Remarque : les suites arithmétiques et géométriques sont des suites récurrentes.

Exemples d'application

1. Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3} \end{cases}$$

Déterminer la monotonie de cette suite à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

2. Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + 3} \end{cases}$$

Déterminer de même la monotonie de cette suite.

Corrigé commenté

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \sqrt{x+3}$.
La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+ , donc :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

$f'(x) > 0$, donc la fonction est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

On calcule u_1, u_2 : $u_1 = \sqrt{u_0 + 3} = \sqrt{6 + 3} = 3$; $u_2 = \sqrt{u_1 + 3} = \sqrt{3 + 3} = \sqrt{6}$.

On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et on démontre par récurrence cette propriété.

On pose P_n : $u_n > u_{n+1}$.

• **Initialisation** : P_0 est vraie car $u_0 > u_1$.

• **Hérédité** : on suppose que pour $n \geq 0$, $u_n > u_{n+1}$ et on démontre que $u_{n+1} > u_{n+2}$.

On sait que $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est une fonction croissante sur \mathbb{R}_+ , donc $f(u_n) > f(u_{n+1})$

Soit $u_{n+1} > u_{n+2}$ donc P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion** : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est décroissante.

2. On remarque cette fois que $v_0 = 1$ et $v_1 = 2$, on conjecture que la suite (v_n) est croissante.

En utilisant la même fonction f car $v_{n+1} = f(v_n)$, on démontre par récurrence que la suite (v_n) est croissante.

② Démontrer par récurrence que, quel que soit n de \mathbb{N} , le nombre $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

Corrigé commenté

Soit P_n la propriété : $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

• **Initialisation**

Pour $n = 0$: $5^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$, or zéro est multiple de 22, donc P_0 est vraie.

• **Hérédité**

On suppose que pour un entier quelconque $n \geq 0$, la propriété est vraie (hypothèse de récurrence), puis on démontre compte tenu de cette hypothèse que P_{n+1} est vraie.

Or $5^{2(n+1)} - 3^{n+1} = 5^{2n} \times 5^2 - 3 \times 3^n$ soit :

$$5^{2(n+1)} - 3^{n+1} = (22 + 3) \times 5^{2n} - 3 \times 3^n = 22 \times 5^{2n} + 3(5^{2n} - 3^n).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22, le nombre $5^{2(n+1)} - 3^{n+1}$ étant la somme de deux multiples de 22, est un multiple de 22 d'où la véracité de P_{n+1} .

• **Conclusion**

On a vérifié que P_0 est vraie, on a montré que P_{n+1} est vraie sous l'hypothèse de récurrence que P_n était vraie pour un $n \geq 0$, donc :

$(\forall n \in \mathbb{N}), 5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

4 Suites particulières

I. Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques		Suites géométriques		
$n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + r$ $r \in \mathbb{R}$, r : raison de la suite	Relation de récurrence		$n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = qu_n$ $q \in \mathbb{R}$, q : raison de la suite	
$n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 + nr$	Terme général		$n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 q^n$	
$n \in \mathbb{N}$ $p \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$ $u_n = u_p + (n-p)r$	Relation entre deux termes		$n \in \mathbb{N}$ $p \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$ $u_n = u_p (q)^{n-p}$	
Somme de termes consécutifs				
$\sum_{i=0}^n u_i = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$		$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ et } q \neq 1$ <p>Si $q = 1$, alors $\sum_{i=0}^n u_i = (n+1)u_0$</p>		
Sommes particulières				
$1 + 2 + \dots + n = \frac{(1+n)n}{2}$		$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q \neq 1$		
$n \mapsto u_0 + nr$	Limites et monotonie		$n \mapsto q^n$	
Si $r < 0$, la suite est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. Si $r > 0$, la suite est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.	$q < -1$	$-1 < q < 0$	$0 < q < 1$	$q > 1$
	Suite alternée divergente (pas de limite).	Suite alternée convergente de limite nulle.	Suite décroissante convergente de limite nulle.	Suite croissante divergente de limite infinie.

2. Suites définies par $u_{n+1} = au_n + b$

- Si $a = 1$, il s'agit de suites arithmétiques de raison b .
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$, il s'agit de suites géométriques de raison a .
- Si $b \neq 0$ et $a \neq 0$, on considère la fonction affine f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x) = ax + b$.

La représentation graphique de f est une droite \mathcal{D} .

Soit Δ la droite d'équation $y = x$.

Les droites \mathcal{D} et Δ sont sécantes en $I\left(\frac{b}{1-a}; \frac{b}{1-a}\right)$ si $a \neq 1$.

Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite ℓ est telle que $\ell = \frac{b}{1-a}$.

Exemple d'application

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 3$.

Représenter graphiquement la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{5}x + 3$ et tracer la droite Δ d'équation $y = x$. Émettre une conjecture concernant la limite de (u_n) .

Corrigé commenté

Les droites \mathcal{D} (représentative de f) et Δ sont sécantes au point d'abscisse $\frac{15}{2}$. On conjecture que la limite de (u_n) est $\frac{15}{2}$.

